

Mathematische Methoden im Bauwesen II  
Präsenzübung

**Aufgabe 1.1**

Eine Verkehrsmaschine fliegt auf einem nördlichen Breitenkreis (geographische Breite  $\frac{\pi}{4}$ ) von Europa nach Nordamerika. Die Entfernung von Start- und Zielort ist gleich einem Viertel des Breitenkreisumfangs. Während des Fluges sondert das Flugzeug Schadstoffe nach der Formel

$$f(x, y, z) = c \left[ 1 + \cos\left(4 \arctan \frac{y}{x}\right) \right], \quad c > 0,$$

ab. Die jeweilige Flughöhe ist im Vergleich zum Erdradius ( $R=6370$  km) vernachlässigbar. Zu berechnen ist die während des Fluges abgegebene Schadstoffmenge  $M$ .

Hinweis: Skizze anfertigen! Eine Parametrisierung der zu fliegenden Strecke erhält man unter Nutzung sog. *Kugelkoordinaten*

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} R \cos \Phi \cos t \\ R \cos \Phi \sin t \\ R \sin \Phi \end{pmatrix}.$$

Dabei ist  $\Phi$  die geographische Breite,  $t$  der Bereich für die geographische Länge, in dem wir uns bewegen und den wir als  $[0; \frac{\pi}{2}]$  annehmen dürfen (warum?).

**Aufgabe 1.2**

Berechnen Sie für  $a \in \mathbb{R}_+$  die Koordinaten des Schwerpunktes eines vollen Bogens der Zykloide

$$C: \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{pmatrix}, \quad 0 < t < 2\pi,$$

mit der Massenverteilung  $\mu(x, y) = \sqrt{y}$ . Wie groß ist die Gesamtmasse  $M$  der Kurve?

**Aufgabe 1.3**

In der Leichtathletik ist für die beim Hochsprung erreichbare Höhe der Schwerpunkt des über die Hochsprunglatte zu bewegenden Körpers entscheidend. *Fosbury-Flop* heißt eine nach dem Amerikaner R. Fosbury (\*1947) benannte Hochsprungtechnik. Dabei überquert der Springer die Latte mit Kopf und Schulter voraus und er landet auf Schulter und Rücken.

Bestimmen Sie zunächst den Schwerpunkt eines Viertelkreisbogens bei homogener Massenverteilung. Wo liegt der Vorteil der Fosbury-Technik?

#### Aufgabe 1.4

Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_C xy \, ds,$$

wobei sich die (geschlossene) Kurve  $C$  aus folgenden Teilstücken zusammensetzt:

- das Geradenstück zwischen den Punkten  $P_1(0, 0, 0)$  und  $P_2(1, 0, 0)$ ,
- die Verbindung der Punkte  $P_2$  und  $P_3(1, 1, 1)$  durch einen Teil der Kurve mit der Parameterdarstellung  $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$ ,  $t \in \mathbb{R}$ ,
- das Geradenstück von  $P_3$  nach  $P_1$ .

Kann  $I$  Null ergeben? Muss  $I$  Null ergeben?

#### Aufgabe 1.5

Konvergiert das Integral

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{1+x^2} \, dx ?$$

#### Aufgabe 1.6

Die Rotation der Funktion  $f : [1; \infty[ \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x) = \frac{1}{x}$  um die  $x$ -Achse erzeugt ein „unendlich langes Horn“. Bestätigen Sie, dass der Rotationskörper ein endliches Volumen und einen unendlich großen Oberflächeninhalt hat. Interpretieren Sie das (paradoxe?) Ergebnis anschaulich.

#### Aufgabe 1.7

Für  $x \in (0; \infty)$  sei  $f(x) = \frac{1}{x^\alpha}$  mit  $\alpha \in \mathbb{R}$  gegeben. Für welche  $\alpha$  konvergiert

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_0^1 \frac{1}{x^\alpha} \, dx \quad \text{bzw.} \quad \int_0^\infty \frac{1}{x^\alpha} \, dx ?$$

#### Aufgabe 1.8

Die Moleküle eines Gases bewegen sich mit unterschiedlichen Geschwindigkeiten, die sich in Folge von Zusammenstößen noch laufend ändern. Dabei treten alle Geschwindigkeiten

zwischen  $v = 0$  und  $v = \infty$  mit einer gewissen Wahrscheinlichkeit auf, die durch die *Maxwell-Boltzmannsche Verteilungsfunktion*

$$F(v) = 4\pi \cdot \left(\frac{m}{2\pi kT}\right)^{3/2} \cdot v^2 \cdot e^{-\frac{mv^2}{2kT}}, \quad v \geq 0,$$

beschrieben wird. Dabei ist  $m$  die Molekülmasse,  $k$  die Boltzmannsche Konstante und  $T$  die absolute Temperatur des Gases.

- a) Mit welcher mittleren (durchschnittlichen) Geschwindigkeit

$$\bar{v} = \int_0^{\infty} v \cdot F(v) dv$$

bewegen sich die Gasmoleküle?

- b) Wie groß ist diese Geschwindigkeit für ein Helium-Gas der Temperatur  $\nu = 800^\circ \text{C} = 1073,15 \text{ K}$ ? ( $m_{\text{He}} = 6,646577 \cdot 10^{-27} \text{ kg}$ ;  $k = 1,380622 \cdot 10^{-23} \text{ Nm/K}$ )

Hinweise: 1) Substitution, partielle Integration, uneigentliche Integrale. 2) Es erleichtert die Sache, geeignete Abkürzungen einzuführen! 3)  $\int x^3 \cdot e^{-sx^2} dx = \int x^2 \cdot e^{-sx^2} \cdot x dx$ . 4) Substitution:  $x = -mv^2/(2kT)$ .