Universität Dortmund, FB Mathematik, AOR Dr. A. Langer

Klausur zu MB III/IV am 05.09.2007

Name:	Vorname:
Matr.-Nr.:	Fach (B2 oder B3):

Für die Bearbeitung der Aufgaben sind die beigefügten Blätter zu benutzen. Andere oder herausgelöste Blätter werden bei der Korrektur nicht berücksichtigt - ohne Ausnahme. Falls der Raum zur Bearbeitung einer Aufgabe nicht ausreichen sollte, benutzen Sie bitte die Rückseite der Blätter, aber mit klaren Hinweisen, dass es dort weiter geht und zu welcher Aufgabe was gehört.

Die maximal erreichbare Punktzahl je Aufgabe beträgt 6. Diese Höchstzahl wird für eine richtige Lösung jedoch nur dann vergeben, wenn auch der Lösungsweg aus der Niederschrift klar ersichtlich ist.

Zusätzlich zu den angegebenen Punkten wird für jede vollkommen richtig gelöste Aufgabe jeweils ein Sonderpunkt vergeben, so dass

$$36 \;+6 \text{ Sonderpunkte } \;=\; 42 \text{ Punkte}$$

erreichbar sind.

Die Klausur ist bestanden, wenn 20 Punkte erreicht sind.

Aufgabe	1	2	3	4	5	6	$\sum$
Punkte							

Aufgabe 1 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$2x^3y''' + 2x^2y'' + xy' = x, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = 1.$$

Hinweis: Eine spezielle Lösung läßt sich leicht erraten.

Aufgabe 2 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Entwickeln Sie die Funktion $\tilde{f} : [0; 2] \to \mathbb{R}$

$$\tilde{f}(x) = \begin{cases} 1, & 0 \leq x \leq 1, \\ 0, & 1 < x \leq 2, \end{cases}$$

in eine reine Sinusreihe. Die Angabe der Koeffizienten genügt, die Reihe muss nicht geschlossen hingeschrieben werden.

Aufgabe 3 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Gegeben seien

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1/3 & 1/3 \\ 1/3 & 1 & 1/3 \\ 1/3 & 1/3 & 1 \end{pmatrix} \in M_{3,3}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 5 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3.$$

a) Ist das Zeilensummenkriterium erfüllt?

b) Zeigen Sie, dass $||C_{GSV}||_2 < 1$ gilt. Dabei ist C_{GSV} die Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahrens. Welche Konsequenz hat dies?

c) Berechnen Sie die erste Iterierte des Gesamtschrittverfahrens. Verwenden Sie als Startvektor dabei $\underline{x}^{(0)} = (1, 1, 1)^T$.

Aufgabe 4

Zur numerischen Lösung des Anfangswertproblems

$$\underline{y}' = \begin{pmatrix} 2xy_1^2 - x^2 y_2 \\ \\ 3y_2^2 - x\sqrt{y_1} \end{pmatrix}, \qquad \underline{y}(1) = \begin{pmatrix} 4 \\ \\ 2 \end{pmatrix},$$

soll das α-Verfahren mit $\alpha = 9/10$ verwendet werden. Führen Sie einen Schritt zur Schrittweite $h = 1/2$ mit dem Verfahren durch. Zur Lösung des nicht-linearen Gleichungssystems verwenden Sie das Fixpunktverfahren, für das Sie eine Iteration durchführen. Zur Bestimmung eines Startwertes für das Fixpunktverfahren benutzen Sie das explizite Euler-Verfahren.

Aufgabe 5 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Berechnen Sie für

$$\underline{a}(x,y,z) = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \quad \eta(x,y,z) = xyz(z-1)$$

und

$$Z = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \,|\, x^2 + y^2 \leq 1,\ 0 \leq z \leq 1\}$$

mit Hilfe partieller Integration:

$$\int_Z < \underline{a}, \eta' > \, dZ.$$

Aufgabe 6 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!)**

Das Wärmeleitungsproblem $u_t = u_{xx}$, $x \in [0;1]$, $t > 0$, mit Randbedingungen $u(0,t) = u(1,t) = 0$ für $t \geq 0$ und der Anfangsbedingung $u(x,0) = x(1-x)$, $x \in [0;1]$, sei gegeben. Das Problem soll mit dem α-Verfahren mit $\alpha = 1/4$ diskretisiert werden. Als Ortsschrittweite wird $h = 1/3$ gewählt. Wieviele Zeitschritte benötigen Sie mindestens, um $u(1/3,1)$ und $u(2/3,1)$ berechnen zu können? Geben Sie das entstehende Gleichungssystem für die Berechnung der Unbekannten in der ersten Zeitschicht an, d.h. Matrix und rechte Seite. Das Gleichungssystem muss nicht gelöst werden.