

Mathematische Methoden im Bauwesen II
15. Übung

Aufgabe 15.1

Auf $[-1; 1]$ sind die Funktionen

$$L_0(x) = 1, \quad L_1(x) = x, \quad L_2(x) = 3x^2 - 1$$

gegeben.

- (i) Zeigen Sie, daß die drei Funktionen bzgl. des Integralskalarproduktes orthogonal zueinander sind.
- (ii) Bilden Sie aus den drei Funktionen ein Orthonormalsystem.
- (iii) Bilden Sie die Bestapproximation in dem aus den orthonormierten Funktionen aufgespannten Raum für die Funktion $g(x) = x^3$.

Aufgabe 15.2

Zeigen Sie: Für eine symmetrische, positiv definite Matrix A ist durch

$$\langle \underline{x}, \underline{y} \rangle_A := \underline{x}^T A \underline{y}$$

ein Skalarprodukt auf dem \mathbb{R}^n definiert.

Aufgabe 15.3

Zeigen Sie, daß die (skalierten) Tschebyscheff-Polynome

$$\frac{1}{\sqrt{\pi}}, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_1, \quad \sqrt{\frac{2}{\pi}} T_2, \quad \dots$$

ein Orthonormalsystem bzgl. des Skalarproduktes

$$\langle f, g \rangle := \int_{-1}^1 f(x) g(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

bilden. Hinweis: Substitutionsregel.

Aufgabe 15.4

Geben Sie die beste Approximation für den Vektor $\underline{w} = (1, 2, 1, 0)^T$ in dem Raum an, der

aus den Vektoren $\underline{x}_1 = (1, 0, -1, 0)^T$, $\underline{x}_2 = (0, 1, 0, 1)^T$ und $\underline{x}_3 = (1, -1, -1, 0)^T$ aufgespannt wird. Hinweis: Versuchen Sie zunächst, ein ONS des Unterraumes zu konstruieren.

Aufgabe 15.5

Ist/Sind die gegebene(n) Funktion(en) Lösung(en) der Dgl.?:

- (a) $y'' - y = 0$, $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = \cosh x$,
- (b) $y'' + 2y' - 3y = 0$, $y_1(x) = e^{-3x}$, $y_2(x) = e^x$,
- (c) $xy' - y = x^2$, $y(x) = 3x + x^2$,
- (d) $y''' + 4y'' - 3y = -x$, $y_1(x) = x/3$, $y_2(x) = e^{-x} + x/3$,
- (e) $2x^2y'' + 3xy' - y = 0$, $x > 0$, $y_1(x) = \sqrt{x}$, $y_2(x) = 1/x$,
- (f) $x^2y'' + 5xy' + 4y = 0$, $x > 0$, $y_1(x) = 1/x^2$, $y_2(x) = x^{-2} \ln x$,
- (g) $y' - 2xy = 1$, $y(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2}$.

Aufgabe 15.6

Zeigen Sie, dass die gegebene Funktion oder die gegebenen Funktionen Lösungen der partiellen Differentialgleichung sind:

- (a) $u_{xx} + u_{yy} = 0$: $u_1(x, y) = \cos x \cosh y$, $u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$;
- (b) $\alpha^2 u_{xx} = u_t$: $u_1(x, t) = e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \sin(\lambda x)$, $u_2(x, t) = (\pi/t)^{1/2} e^{-x^2/(4\alpha^2 t)}$,
($\lambda \in \mathbb{R}$ konstant, $t > 0$ bei u_2),
- (c) $a^2 u_{xx} = u_{tt}$: $u_1(x, t) = \sin(\lambda x) \sin(\lambda a t)$, $u_2(x, t) = \sin(x - a t)$,
 $u_3(x, t) = f(x - a t) + g(x + a t)$
($\lambda \in \mathbb{R}$ konstant, f und g zweifach differenzierbare Funktionen).

Aufgabe 15.7

Bestimmen Sie die Werte für r , für die die gegebenen Differentialgleichungen für $x > 0$ Lösungen der Form $y = x^r$ besitzen:

- (a) $x^2 y'' + 4xy' + 2y = 0$, (b) $x^2 y'' - 4xy' + 4y = 0$.

Aufgabe 15.8

Bestimmen Sie die Werte für r , für die die gegebenen Differentialgleichungen Lösungen der Form $y = e^{rx}$ besitzen:

- (a) $y' + 2y = 0$, (b) $y'' - y = 0$,
- (c) $y'' + y' - 6y = 0$, (d) $y''' - 3y'' + 2y = 0$.

Aufgabe 15.9

Lösen Sie

(a*) $e^x - y^2 e^x + (y + y e^x) y' = 0$ (Trennung der Variablen),

(b*) $(2 + xy) e^{xy} + x^2 e^{xy} y' = 0$ (integrierender Faktor),

(c) $(1 - xy) e^{-y(x-1)} - (x^2 - x) e^{-y(x-1)} y' = 0$ mit $y(2) = 0$ (AWP).

Aufgabe 15.10

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(2x^2 y + 1) dx + \left(\frac{2}{3} x^3 + y\right) dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

Aufgabe 15.11

Eine arretierte Zylinderscheibe wird in der aus der Abbildung 1 ersichtlichen Weise von einem biegsamen Seil umschlungen, das am rechten Rand durch eine Gewichtskraft $G = mg$ belastet wird. In Folge der Haftreibung zwischen Seil und Zylinderscheibe ist die Seilkraft S zwischen Seil und Zylinderscheibe nicht konstant, sondern eine noch vom Zentriwinkel α abhängige Größe $S = S(\alpha)$. Im Gleichgewichtszustand genügt dabei die Seilkraft der Differentialgleichung

$$\frac{dS}{d\alpha} = \mu_0 S$$

mit dem Haftreibungskoeffizienten $\mu_0 > 0$.

- (a) Mit welcher Kraft F_0 relativ zu G muß man am linken Seilende einwirken, um ein Abgleiten der Masse m zu verhindern, wenn der Haftreibungskoeffizient den Wert $\mu_0 = 0.5$ besitzt?
- (b) Wie groß darf die am rechten Seilende befestigte Last F werden, wenn man das linke Seilende mit der Kraft $F_0 = 100N$ festhält und das Seil die Zylinderscheibe genau 2.5 mal umschlingt?

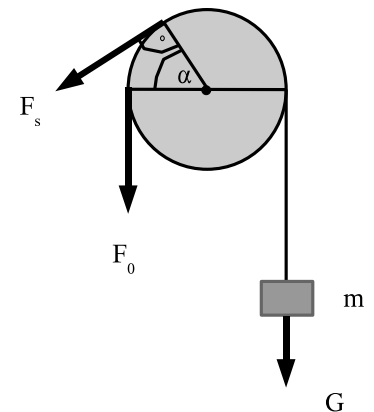


Abbildung 1: Arretierte Zylinderscheibe

Abgabe: keine. Die Aufgaben werden in der ersten Globalübung (Math. Meth. im BW III) am besprochen.