

Mathematische Methoden im Bauwesen II

14. Übung

Aufgabe 14.1

Was ist richtig? Für die Funktion $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ und $f(x) = \sin(\frac{2}{3}x)$ gilt:

- () f hat die Periode $T = \frac{2}{3}\pi$.
- () f hat die Periode $T = \frac{3}{2}\pi$.
- () f hat die Periode $T = 3\pi$.
- () $\sin(\frac{2}{3}x)$ ist die Fourier-Reihe von f .

Aufgabe 14.2*

Seien $a, T \in \mathbb{R}$ und $T > 0$. Weisen Sie die folgenden Orthogonalitätsrelationen nach:

- (i) $\frac{2}{T} \int_a^{a+T} \cos \frac{2k}{T} \pi x \cdot \cos \frac{2m}{T} \pi x \, dx = \delta_{mk},$
- (ii) $\frac{2}{T} \int_a^{a+T} \sin \frac{2k}{T} \pi x \cdot \sin \frac{2m}{T} \pi x \, dx = \delta_{mk},$
- (iii) $\int_a^{a+T} \sin \frac{2k}{T} \pi x \cdot \cos \frac{2m}{T} \pi x = 0 \quad m, k \in \mathbb{N}.$

Aufgabe 14.3

Zeigen Sie, daß für die Fourierkoeffizienten einer geraden, T -periodischen Funktion f gilt:

$$b_n = 0, \quad a_n = \frac{4}{T} \int_0^{T/2} f(x) \cos(n\omega x) \, dx.$$

Was gilt für den Fall einer ungeraden, T -periodischen Funktion?

Aufgabe 14.4*

Entwickeln Sie $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = |\sin x|$ in eine Fourierreihe.

Aufgabe 14.5

Wie lautet die Fourier-Reihe der 2π -periodischen Fortsetzung der Funktion

$$f(x) = \frac{x^2}{4}, \quad -\pi \leq x < \pi?$$

Zeigen Sie mit Hilfe der Fourier-Darstellung die Beziehungen

$$\frac{\pi^2}{6} = 1 + \frac{1}{4} + \frac{1}{9} + \frac{1}{16} + \dots, \quad \frac{\pi^2}{12} = 1 - \frac{1}{4} + \frac{1}{9} - \frac{1}{16} \pm \dots$$

Hinweis: $\int x^2 \cos(nx) dx = \frac{2x}{n^2} \cos(nx) + \left(\frac{x^2}{n} - \frac{2}{n^3}\right) \sin(nx)$.

Aufgabe 14.6

Entwickeln Sie die durch $f(x) = x$, $0 \leq x \leq \pi$, gegebene Funktion in

- a) eine Fourierreihe mit cos- und sin-Gliedern,
- b) eine reine Cosinus-Reihe,
- c) eine reine Sinus-Reihe.

Skizzieren Sie jeweils die periodische Fortsetzung. Wo konvergieren die Reihen und wogegen?

Aufgabe 14.7

Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 1-periodische Fourierreihe zu $f : [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^x$. Gilt dann

- (i) $F\left(-\frac{3}{2}\right) = \sqrt{e}$,
- (ii) $\lim_{x \rightarrow 0} F(x) = \frac{1+e}{2}$?

Aufgabe 14.8*

- a) Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2-periodische Fourierreihe zu $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Berechnen Sie $\lim_{x \rightarrow 1^-} F(x)$.
- b) Sei $F : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ 2-periodische Fourierreihe zu $f : [1, 3] \rightarrow \mathbb{R}$, $f(x) = e^{-x}$. Zeigen Sie mit Hilfe von Grenzwertuntersuchungen, dass F im Punkt $x = -1$ nicht stetig ist.

Aufgabe 14.9

Bestimmen Sie die 2π -periodische Fourierreihe von $f : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} -k & , -\pi \leq x < 0, \\ k & , 0 \leq x < \pi. \end{cases}$$

Folgern Sie daraus, daß gilt:

$$\frac{\pi}{4} = 1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \frac{1}{7} \pm \dots$$

Aufgabe 14.10

Testen Sie Ihr Wissen: Die Funktion $g : [-1; 1] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$g(x) = \begin{cases} x^2 & , x \in [-1; 0), \\ \sqrt{x} & , x \in (0; 1], \end{cases}$$

sei gegeben. Dann gilt:

- g ist stückweise stetig,
- g ist stetig,
- g ist beschränkt,
- g ist stückweise stetig differenzierbar (man sagt auch, g ist stückweise *glatt*).

Aufgabe 14.11*

Wissen Sie Bescheid? Sei f eine 2π -periodische Funktion, die auf $[0; 2\pi]$ stückweise glatt ist. Dann gilt:

- Die Fourier-Reihe von f konvergiert punktweise.
- Die Fourier-Reihe von f konvergiert punktweise gegen f für alle $x \in \mathbb{R}$.
Beachte, daß f nicht an jeder Stelle x dem arithmetischen Mittel von rechts- und linksseitigem Grenzwert entsprechen muß.

Aufgabe 14.12

Was ist richtig? Sei $\tilde{f} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ die 2π -periodische Fortsetzung der durch $f : [-\pi; \pi] \rightarrow \mathbb{R}$ gegebenen Funktion mit $f(x) = \sqrt{x + \pi}$. Dann gilt:

- f ist stetig auf $[-2\pi; 2\pi]$.
- f ist stückweise stetig auf $[-2\pi; 2\pi]$.
- f ist glatt auf $[-2\pi; 2\pi]$.

() f ist stückweise glatt auf $[-2\pi; 2\pi]$.

Aufgabe 14.13*

Geben Sie $p(x) = a + b \cos x + c \sin x$ an, so daß

$$\int_0^{2\pi} \left[\sin \frac{x}{2} - p(x) \right]^2 dx$$

minimal wird ($a, b, c \in \mathbb{R}$).

Aufgabe 14.14*

Die Funktion $f : [-2, 0] \rightarrow \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \leq x \leq -1, \\ 1, & -1 < x \leq 0, \end{cases}$$

soll in eine reine Cosinus-Reihe entwickelt werden.

- a) Skizzieren Sie die gewählte Fortsetzung von f auf ganz \mathbb{R} .
- b) Geben Sie die Reihenentwicklung geschlossen an.
- c) Geben Sie den Wert der Fourier-Reihe für $x = -22$ an.
- d) Leiten Sie aus c) eine Reihenentwicklung für π her.

Bemerkung: Die mit * gekennzeichneten Aufgaben werden in der Globalübung besprochen, die anderen in den kleinen Übungen.

Bearbeitungsziel: Donnerstag, 05.07.2007, 12 Uhr