Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
AOR Dr. A. Langer

21.06.2007

Mathematische Methoden im Bauwesen II

13. Übung

Aufgabe 13.1*

Zeigen Sie, dass

$$\rho(A \cdot B) \leq \rho(A) \cdot \rho(B)$$

für alle unteren Dreiecksmatrizen gilt, aber nicht für allgemeine Matrizen (Gegenbeispiel).
Hinweis: Wie sieht das Produkt zweier unterer Dreiecksmatrizen aus?

Aufgabe 13.2

Zeigen Sie, dass die Zeilensummennorm $||\cdot||_\infty$ für Matrizen und die Vektornorm $||\cdot||_\infty$ verträglich sind. Zeigen Sie dies ebenfalls für die Spaltensummennorm $||\cdot||_1$ für Matrizen und die Vektornorm $||\cdot||_1$.

Aufgabe 13.3*

Widerlegen Sie: $\rho(A+B) \leq \rho(A) + \rho(B)$.

Aufgabe 13.4

Zu einer Matrix $A = (a_{ij})$ sei definiert:

$$||A|| := \sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{n} |a_{ij}|$$

Zeigen Sie, dass dadurch eine Matrixnorm definiert wird.

Aufgabe 13.5*

Welchen Bedingungen muss die Matrix A genügen, damit

$$||\underline{x}||' = ||A\underline{x}||, \quad ||\cdot|| \text{ Vektornorm},$$

eine Vektornorm ist?

Aufgabe 13.6

Betrachten Sie noch einmal die Matrix

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 1 \end{pmatrix}$$

aus Aufgabe 12.9. Erklären Sie das dort vermutete Konvergenzverhalten.

Aufgabe 13.7*

Zeigen Sie, dass zur Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -1/2 & -1/2 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1/2 & -1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

das Einzelschrittverfahren konvergiert, das Gesamtschrittverfahren aber nicht.

Aufgabe 13.8

Gegeben sei das lineare Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 3/10 & -1/10 & 6/5 \\ -1/10 & 3 & 1/5 & 7/10 \\ 3/10 & -1/5 & 1 & 1/10 \\ 2/5 & -3/10 & 7/10 & 2 \end{pmatrix}, \quad \underline{b} = \begin{pmatrix} 1/2 \\ 0 \\ 1 \\ 1/10 \end{pmatrix}.$$

Zeigen Sie, dass das Gesamtschrittverfahren konvergiert. Konvergiert auch das Einzelschrittverfahren? Führen Sie für beide Verfahren ausgehend vom Startvektor $\underline{x}^{(0)} = (1,1,1,1)^T$ einen Iterationsschritt durch.

Aufgabe 13.9*

Gegeben sei das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 4 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie jeweils drei Iterationen mit dem Gesamt- und dem Einzelschrittverfahren. Verwenden Sie den Nullvektor als Startvektor. Geben Sie die exakte Lösung des Gleichungssystems an. Berechnen Sie

$$||A||_1, \quad ||A||_\infty, \quad ||A||_2, \qquad A \in \{C_{GSV}, C_{ESV}\}.$$

Berechnen Sie ebenfalls den Spektralradius der Iterationsmatrizen. Wieviele Iterationen müssen Sie mit dem Gesamtschrittverfahren machen, um einen Fehler kleiner als 10^{-3} zu garantieren? (Verwenden Sie dazu $||\cdot||_\infty$.) Erklären Sie die bessere Konvergenz des Einzelschrittverfahrens.

Aufgabe 13.10

Gegeben sei ein Gleichungssystem $A\underline{x} = \underline{b}$ mit der Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & d \\ 0 & 1 & 2 \\ 4d & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

mit einem Parameter $d \in \mathbb{R}$.

(a) Kann man mit Hilfe des Zeilensummenkriteriums Werte für den Parameter d angeben, für die das Gesamtschrittverfahren bzw. das Einzelschrittverfahren für jeden Startvektor konvergieren? Begründen Sie die Antwort.

(b) Geben Sie alle Werte von d an, für die das Gesamtschrittverfahren für jeden Startvektor konvergiert.

(c) Führen Sie die Überlegungen von (b) für das Einzelschrittverfahren durch.

Bemerkung: Die mit * gekennzeichneten Aufgaben werden in der Globalübung besprochen, die anderen in den kleinen Übungen.

Bearbeitungsziel: Donnerstag, 28.06.2007, 12 Uhr