

Mathematische Methoden im Bauwesen II

4. Übung

Aufgabe 4.1

Messwerte und Messfehler einer physikalisch-technischen Größe t sind im Regelfall normalverteilt, d.h. sie unterliegen der Gaußschen Normalverteilung mit der Verteilungsdichtefunktion

$$\varphi(t) = N \cdot e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < t < \infty,$$

und den beiden Kennwerten μ (Erwartungswert) und σ (Standardabweichung). Der Faktor N in der Verteilungsdichtefunktion wird dabei so gewählt, dass die Gesamtfläche unter der Gaußschen Kurve den Wert 1 erhält:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t) dt = N \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = 1.$$

Man bezeichnet diesen Vorgang als Normierung und N daher als Normierungsfaktor. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N . Es sei bemerkt, dass das uneigentliche Integral elementar nicht lösbar ist.

Gehen Sie wie folgt vor:

- (a) Führen Sie zunächst die Substitution $x = \frac{t-\mu}{\sigma}$ durch. Sie führt auf die übersichtlichere Gleichung

$$N\sigma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

- (b) Quadrieren Sie jetzt diese Gleichung und führen Sie in den beiden (identischen) Integralen der linken Seite formal unterschiedliche Bezeichnungen für die Integrationsvariable ein. Sie erhalten dann die Gleichung

$$N^2\sigma^2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy \right) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy dx = 1.$$

- (c) Lösen Sie dieses Doppelintegral, indem Sie zu Polarkoordinaten übergehen und berechnen Sie anschließend aus der Gleichung den Normierungsfaktor N .

Lösung:

(1) Wir nehmen zunächst die Substitution vor:

$$x = \frac{t - \mu}{\sigma}, \quad dx = \frac{1}{\sigma} dt.$$

Die Integrationsgrenzen verändern sich formal nicht, d.h.

$$x = -\infty \Leftrightarrow t = -\infty, \quad x = \infty \Leftrightarrow t = \infty.$$

Dann erhalten wir

$$N \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} \left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = N \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} \cdot \sigma dx = N\sigma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \stackrel{!}{=} 1.$$

(2) Quadrieren der Gleichung und Umbenennen der Integrationsvariablen des zweiten (rechten) Integrals ($x \rightarrow y$) ergibt:

$$N^2 \sigma^2 \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} dx \right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} y^2} dy \right) = 1.$$

Dieses Integralprodukt können wir auch als Doppelintegral schreiben:

$$N^2 \sigma^2 \cdot \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} x^2} \cdot e^{-\frac{1}{2} y^2} dy dx = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (x^2+y^2)} dy dx = 1.$$

(3) Wir gehen zu Polarkoordinaten $x = r \cos \varphi$, $y = r \sin \varphi$ über und erhalten

$$\begin{aligned} N^2 \sigma^2 \cdot \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} (x^2+y^2)} dy dx &= N^2 \sigma^2 \cdot \int_{\varphi=0}^{2\pi} \int_{r=0}^{\infty} e^{-\frac{1}{2} r^2} \cdot r dr d\varphi \\ &= 2\pi N^2 \sigma^2 \lim_{t \rightarrow \infty} [-e^{-\frac{1}{2} r^2}]_0^t \\ &= 2\pi N^2 \sigma^2 \stackrel{!}{=} 1. \end{aligned}$$

Also ist

$$N = \frac{1}{\sqrt{2\pi} \cdot \sigma}.$$

Aufgabe 4.4

Aus einer Kugel mit Radius r und Mittelpunkt im Ursprung wird durch einen geraden Kreiszylinder vom Radius $r/2$, dessen Mantelfläche durch den Ursprung geht, ein Volumen ausgeschnitten. Berechnen Sie dieses. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten. Hinweis: Das Ergebnis lautet $\frac{4}{3}r^3\left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

Lösung:

Wir führen Zylinderkoordinaten

$$x = u \cos v, \quad y = u \sin v, \quad z = z$$

ein und erhalten für den Kreiszylinder

$$\left(x - \frac{r}{2}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{r}{2}\right)^2 \Leftrightarrow x^2 + y^2 = rx.$$

Setzen wir in diese Gleichung die Zylinderkoordinaten ein, erhalten wir

$$x^2 + y^2 = rx \Rightarrow u^2 = ru \cos v \Leftrightarrow u = r \cos v.$$

Wenn wir die Symmetrie des Problems betrachten, können wir uns auf eine Achtelkugel beschränken, d.h.

$$0 \leq v \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq u \leq r \cos v, \quad 0 \leq z \leq \sqrt{r^2 - x^2 - y^2} = \sqrt{r^2 - u^2}.$$

Dann erhalten wir für das Volumen

$$\begin{aligned} V &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{r \cos v} \int_0^{\sqrt{r^2 - u^2}} u \, dz \, du \, dv \\ &= 4 \cdot \int_0^{\pi/2} \int_0^{r \cos v} u \sqrt{r^2 - u^2} \, du \, dv \\ &= 4 \cdot \frac{2}{3} \cdot \left(-\frac{1}{2}\right) \cdot \int_0^{\pi/2} [(r^2 - u^2)^{3/2}]_0^{r \cos v} \, dv \\ &= \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \int_0^{\pi/2} \left((r^2 - r^2 \cos^2 v)^{3/2} - r^3\right) \, dv \\ &= \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \int_0^{\pi/2} \left((r^2 \sin^2 v)^{3/2} - r^3\right) \, dv \\ &= \left(-\frac{4}{3}\right) \cdot \int_0^{\pi/2} \left(r^3 \sin^3 v - r^3\right) \, dv \\ &= \frac{4}{3} \cdot \int_0^{\pi/2} r^3 \cdot (1 - \sin^3 v) \, dv \\ &= \frac{4}{3} r^3 \left(\frac{\pi}{2} - \int_0^{\pi/2} \sin^3 v \, dv\right) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} &= \frac{4}{3} r^3 \left(\frac{\pi}{2} - \left[-\cos v + \frac{1}{3} \cos^3 v \right]_0^{\pi/2} \right) \\ &= \frac{4}{3} r^3 \left(\frac{\pi}{2} - 1 + \frac{1}{3} \right) \\ &= \frac{4}{3} r^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3} \right). \end{aligned}$$

Aufgabe 4.8

Zur Entwicklung einer Kubaturformel auf einem Dreieck in allgemeiner Lage ersetzen wir den Integranden $f(x, y)$ durch das quadratische Interpolationspolynom zu den Ecken des Dreiecks und den Seitenmittelpunkten. Geben Sie die Kubaturformel an.

Lösung:

Wir lösen das Problem zunächst auf dem Dreieck \hat{T} mit den Ecken $\underline{x}_0 = (0, 0)$, $\underline{x}_1 = (1, 0)$, $\underline{x}_2 = (0, 1)$ und den Seitenmittelpunkten $\underline{x}_3 = (1/2, 0)$, $\underline{x}_4 = (1/2, 1/2)$, $\underline{x}_5 = (0, 1/2)$. Dann lautet das Lagrange-Polynom

$$l_0(x, y) = (1/2 - x - y) \cdot (1 - x - y) \cdot 2 = (1 - 2x - 2y) \cdot (1 - x - y).$$

Weiter erhalten wir

$$l_1(x, y) = x \cdot (x - 1/2) \cdot 2 = x \cdot (2x - 1),$$

$$l_2(x, y) = y \cdot (y - 1/2) \cdot 2 = y \cdot (2y - 1).$$

Für die Seitenmittelpunkte erhalten wir

$$l_3(x, y) = x \cdot (1 - x - y) \cdot 4,$$

$$l_4(x, y) = 4xy,$$

$$l_5(x, y) = 4y(1 - x - y).$$

Wir prüfen die Summe der l_i und erhalten

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 l_i(x, y) &= 1 - 3x - 3y + 2x^2 + 4xy + 2y^2 + 2x^2 - x + 2y^2 - y + \\ &\quad 4x - 4x^2 - 4xy + 4xy + 4y - 4xy - 4y^2 = 1. \end{aligned}$$

Weiter ist dann

$$\begin{aligned} \int_{\hat{T}} f(x, y) dx dy &\approx \int_0^1 \int_0^{1-x} \sum_{i=0}^5 f_i l_i(x, y) dy dx \\ &= \sum_{i=0}^5 f_i \underbrace{\int_0^1 \int_0^{1-x} l_i(x, y) dy dx}_{A_i}. \end{aligned}$$

Wir berechnen die Gewichte im Einzelnen:

$$\begin{aligned} A_0 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - 2x - 2y) \cdot (1 - x - y) dy dx \\ &= \int_0^1 \int_0^{1-x} (1 - 3x - 3y + 2x^2 + 4xy + 2y^2) dy dx \\ &= \int_0^1 (1 - x)(1 - 3x + 2x^2) dx + \frac{1}{2} \cdot \int_0^1 (1 - x)^2 (4x - 3) dx + \frac{2}{3} \cdot \int_0^1 (1 - x)^3 dx \\ &= \frac{1}{6} + \frac{1}{2} \cdot \frac{(-2)}{3} + \frac{2}{3} \cdot \frac{1}{4} = 0. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_1 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} x \cdot (2x - 1) dy dx \\
&= \int_0^1 (1-x) \cdot x \cdot (2x - 1) dx \\
&= \int_0^1 (-2x^3 + 3x^2 - x) dx = \frac{-1}{2} + 1 - \frac{1}{2} = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A_2 &= \int_0^1 \int_0^{1-x} y \cdot (2y - 1) dy dx \\
&= \int_0^1 \left(\frac{2}{3}(1-x)^3 - \frac{1}{2}(1-x)^2 \right) dx = \dots = 0.
\end{aligned}$$

Da die Gewichte in den Ecken somit verschwinden, reduziert sich der Kubatur-Ansatz auf die Seitenmittelpunktsregel, deren Gewichte bekannt sind ($A_3 = A_4 = A_5 = 1/6$). Die Lösung auf einem beliebigen Dreieck in allgemeiner Lage ergibt sich durch die bekannte Transformation.