Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
AOR Dr. A. Langer

19.04.2007

Mathematische Methoden im Bauwesen II

4. Übung

Aufgabe 4.1*

Messwerte und Messfehler einer physikalisch-technischen Größe t sind im Regelfall normalverteilt, d.h. sie unterliegen der Gaußschen Normalverteilung mit der Verteilungsdichtefunktion

$$\varphi(t) = N \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}, \quad -\infty < t < \infty,$$

und den beiden Kennwerten μ (Erwartungswert) und σ (Standardabweichung). Der Faktor N in der Verteilungsdichtefunktion wird dabei so gewählt, dass die Gesamtfläche unter der Gaußschen Kurve den Wert 1 erhält:

$$\int_{-\infty}^{\infty} \varphi(t)\, dt = N \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt = 1.$$

Man bezeichnet diesen Vorgang als Normierung und N daher als Normierungsfaktor. Bestimmen Sie den Normierungsfaktor N. Es sei bemerkt, dass das uneigentliche Integral elementar nicht lösbar ist.

Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Führen Sie zunächst die Substitution $x = \frac{t-\mu}{\sigma}$ durch. Sie führt auf die übersichtlichere Gleichung

$$N\sigma \cdot \int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx = 1.$$

(b) Quadrieren Sie jetzt diese Gleichung und führen Sie in den beiden (identischen) Integralen der linken Seite formal unterschiedliche Bezeichnungen für die Integrationsvariable ein. Sie erhalten dann die Gleichung

$$N^2\sigma^2 \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}x^2} dx\right) \cdot \left(\int_{-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}y^2} dy\right) = \int_{x=-\infty}^{\infty} \int_{y=-\infty}^{\infty} e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} dy\, dx = 1.$$

(c) Lösen Sie dieses Doppelintegral, indem Sie zu Polarkoordinaten übergehen und berechnen Sie anschließend aus der Gleichung den Normierungsfaktor N.

Aufgabe 4.2

Bestimmen Sie den Flächeninhalt F einer Ellipse $G = \{\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} \leq 1\}$ mit den Halbachsen a und b. Verwenden Sie die Transformation $x = au\cos v$, $y = bu\sin v$. Wo hat sie ihren Schwerpunkt bei homogener Massenverteilung? Wo liegt der Schwerpunkt, wenn die Dichtefunktion $\mu(x, y) = x^2$ lautet?

Aufgabe 4.3
Wie groß ist die Masse einer Vollkugel vom Radius R_1 mit Dichte $\mu(x,y,z) = \sqrt{x^2+y^2+z^2}$? Wie groß ist der Radius R_2 der Kugel, die man aus der Vollkugel herausschneiden muss, damit die verbleibende Kugelschale der Dicke $R_1 - R_2$ nur die Hälfte der Vollkugel wiegt?

Aufgabe 4.4*
Aus einer Kugel mit Radius r und Mittelpunkt im Ursprung wird durch einen geraden Kreiszylinder vom Radius $r/2$, dessen Mantelfläche durch den Ursprung geht, ein Volumen ausgeschnitten. Berechnen Sie dieses. Verwenden Sie Zylinderkoordinaten. Hinweis: Das Ergebnis lautet $\frac{4}{3}\, r^3 \left(\frac{\pi}{2} - \frac{2}{3}\right)$.

Aufgabe 4.5
Bei einem Körper, der den Bereich B ausfüllt und sich um die z-Achse dreht, ist das Trägheitsmoment bzgl. dieser Achse gleich

$$\Theta_z = \int_B (x^2 + y^2)\, dB.$$

Die Trägheitsmomente bzgl. der anderen Achsen werden entsprechend definiert. Gegeben sei ein Kegel vom Radius r und der Höhe h mit Achse in Richtung der z-Achse und der Spitze im Ursprung. Bestimmen Sie das Trägheitsmoment bzgl. seiner Achse.

Aufgabe 4.6*
Geben Sie die Produkt-Trapez-Regel auf $[-1;1]$ an und berechnen Sie damit

$$\int_2^3 \int_1^4 xy\, dy\, dx.$$

Vergleichen Sie mit der exakten Lösung.

Aufgabe 4.7
Geben Sie die Produkt-Gauß-Regel PG_1 auf $[-1;1]$ an und berechnen Sie damit

$$\int_2^3 \int_1^4 xy\, dy\, dx.$$

Vergleichen Sie mit der exakten Lösung.

Aufgabe 4.8*
Zur Entwicklung einer Kubaturformel auf einem Dreieck in allgemeiner Lage ersetzen wir den Integranden $f(x,y)$ durch das quadratische Interpolationspolynom zu den Ecken des Dreiecks und den Seitenmittelpunkten. Geben Sie die Kubaturformel an.

Bemerkung: Die mit * gekennzeichneten Aufgaben werden in der Globalübung besprochen, die anderen in den kleinen Übungen.

Bearbeitungsziel: Donnerstag, 26.04.2007, 12 Uhr