

Name:	Vorname:
Matr.-Nr.:	

Aufgabe 4.1

(3 Punkte)

Die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1.5 & 2 \\ 0 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

hat einen Eigenwert in der Nähe von $\lambda = -1$. Führen Sie ausgehend vom Startvektor $\underline{x}^{(0)} = (0, 1, 0)^T$ eine Iteration mit der inversen Iteration nach Wielandt durch und geben Sie die resultierende Näherung für den Eigenwert an.

Aufgabe 4.2

(3 Punkte)

Sei $f(x) = -a \cdot x^2 + 2$, $a > 0$, $x \in [0; 2] = I$, gegeben.

1. Zeigen Sie: Für $0 < a < 1/2$ ist f Selbstabbildung auf I .
2. Zeigen Sie: Für $a < 1/4$ ist f kontrahierend auf I .
3. Berechnen Sie ausgehend von $a = 1/8$ und $x^{[0]} = 1$ die ersten beiden Iterierten mit dem Fixpunktverfahren zur Lösung der Gleichung $x = f(x)$.
4. Gegen welchen Wert konvergiert das Fixpunktverfahren für $x = f(x)$ für allgemeines $a > 0$?

Aufgabe 4.3

(3 Punkte)

Betrachten Sie das Gleichungssystem

$$\begin{pmatrix} 1 & -1/2 & 0 \\ -1/3 & 1 & -1/3 \\ 0 & -1/2 & 1 \end{pmatrix} \cdot \underline{x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

1. Konvergiert das Einzelschrittverfahren? Begründen Sie Ihre Antwort.
2. Berechnen Sie den Spektralradius der Iterationsmatrix des Gesamtschrittverfahrens. Beurteilen Sie damit, ob das Gesamtschrittverfahren konvergiert.

Aufgabe 4.4

(4 Punkte)

Die Funktion $f : [0; 2] \rightarrow \mathbb{R}$ mit $f(x) = 1$, $0 \leq x \leq 1$, und $f(x) = 2$, $1 < x \leq 2$, soll in eine reine Cosinus-Reihe entwickelt werden. Skizzieren Sie die gewählte Fortsetzung von f auf ganz \mathbb{R} , geben Sie die Reihenentwicklung und den Wert der Fourier-Reihe für $x = 6$ an. Können Sie daraus eine Reihenentwicklung für π herleiten?