Aufgabe 1 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Die Funktion $f : [-2, 0] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 2, & -2 \leq x \leq -1, \\ 1, & -1 < x \leq 0, \end{cases}$$

soll in eine reine Cosinus-Reihe entwickelt werden.

a) Skizzieren Sie die gewählte Fortsetzung von f auf ganz $\mathbb{R}$.

b) Geben Sie die Reihenentwicklung geschlossen an.

c) Geben Sie den Wert der Fourier-Reihe für $x = -22$ an.

d) Leiten Sie aus c) eine Reihenentwicklung für π her.

Aufgabe 2 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Sei $f(x) = 2 - a \cdot x^3$, $a > 0$, $x \in [0; 2] = I$, gegeben.

a) Geben Sie einen Bereich für a an, so dass f auf $[0; 2]$ Selbstabbildung ist.

b) Geben Sie einen Bereich für a an, so dass f auf $[0; 2]$ kontrahierend ist.

c) Berechnen Sie ausgehend von $a = 1/20$ und $x^{(0)} = 1$ die ersten beiden Iterierten mit dem Fixpunktverfahren zur Lösung der Gleichung $x = f(x)$.

d) Wieviele Iterationen benötigen Sie mit dem Verfahren aus c) höchstens, damit der Abstand vom Fixpunkt kleiner als 10^{-3} ist?

Aufgabe 3 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Transformieren Sie die quadratische Form

$$Q(x_1, x_2, x_3) = -2x_1x_2 + 2x_1x_3 + 2x_2x_3 + x_1 + 2x_2 - x_3 + 1$$

auf Normalform.

Aufgabe 4 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Bestimmen Sie die Oberfläche des Paraboloids

$$z = 2 - x^2 - y^2, \quad x^2 + y^2 \leq 2.$$

Aufgabe 5 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$2x^3y''' + 2x^2y'' + xy' = x, \quad y(1) = 1,\ y'(1) = 2,\ y''(1) = 1.$$

Hinweis: Eine spezielle Lösung läßt sich leicht erraten.

Aufgabe 6 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Lösen Sie das Variationsproblem

$$J(u) = \int_0^3 [3x^2(u')^2 + 2xu]\, dx \stackrel{!}{=} stat., \quad u(0) = 2, \quad u(3) = 1,$$

durch kubische Polynomapproximation auf der Zerlegung $[0;3] = [0;1] \cup [1;3]$ unter Hermite-Interpolationsbedingungen. Gehen Sie wie folgt vor:

a) Approximieren Sie die Koeffizientenfunktionen durch Konstanten mit Hilfe des Integralmittels.

b) Bestimmen Sie die entstehenden quadratischen Formen auf den beiden Teilintervallen.

c) Welche Dimension hat die Gesamtsteifigkeitsmatrix?