Aufgabe 1 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{n=7}^{\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^{n^2} ?$$

Aufgabe 2 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Wie lautet das allgemeine Glied der rekursiv definierten Folge

$$a_1 = 2, \quad a_n = \sum_{i=1}^{n-1} a_i,\ n \geq 2 ?$$

Beweisen Sie Ihre Vermutung mit vollständiger Induktion.

Aufgabe 3 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Untersuchen Sie beispielhaft mit Hilfe der Zahlenfolgen

$$a) \quad \hat{x}_n = 1 + \frac{1}{n} \quad (n \in \mathbb{N}), \qquad b) \quad \tilde{x}_n = \frac{n+1}{n+2} \quad (n \in \mathbb{N}),$$

ob die Funktion $f(x) = \frac{x^2-1}{x-1}$ an der Stelle $x = 1$ einen Grenzwert hat.

Aufgabe 4 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Geben Sie die Bogenlänge und die natürliche Parameterdarstellung der Kurve

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} t - \frac{1}{2}\,t^2 \\ t + \frac{1}{2}\,t^2 \\ \frac{4}{3}\,t^{3/2} \end{pmatrix}, \quad 2 \leq t \leq 3,$$

an.

Aufgabe 5 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Gesucht ist die eindeutig bestimmte Lösung des Gleichungssystems

$$f(\underline{x}) = \begin{pmatrix} x - \sin y \\ y - \cos x \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

a) Begründen Sie geometrisch, d.h. mit Hilfe geeigneter Graphen, dass die Lösung tatsächlich eindeutig bestimmt ist. Geben Sie ein Rechteck $I \times J$ an, in dem sich die Lösung mit Sicherheit befindet.

b) Geben Sie das resultierende Gleichungssystem zur Bestimmung der ersten Newton-Iterierten an. Verwenden Sie dabei als Startvektor $\underline{x}^{(0)} = (\pi/4, \pi/4)^T$.

c) Begründen Sie ohne Berechnung der Lösung, dass die Lösung des Gleichungssystems aus b) eindeutig bestimmt ist.