

Mathematische Methoden im Bauwesen II

15. Übung

**Aufgabe 15.1**

Ist/Sind die gegebene(n) Funktion(en) Lösung(en) der Dgl.?:

(a)  $y'' - y = 0$ ,  $y_1(x) = e^x$ ,  $y_2(x) = \cosh x$ ,

(b)  $y'' + 2y' - 3y = 0$ ,  $y_1(x) = e^{-3x}$ ,  $y_2(x) = e^x$ ,

(c)  $xy' - y = x^2$ ,  $y(x) = 3x + x^2$ ,

(d)  $y''' + 4y'' - 3y = -x$ ,  $y_1(x) = x/3$ ,  $y_2(x) = e^{-x} + x/3$ ,

(e)  $2x^2 y'' + 3xy' - y = 0$ ,  $x > 0$ ,  $y_1(x) = \sqrt{x}$ ,  $y_2(x) = 1/x$ ,

(f)  $x^2 y'' + 5xy' + 4y = 0$ ,  $x > 0$ ,  $y_1(x) = 1/x^2$ ,  $y_2(x) = x^{-2} \ln x$ ,

(g)  $y' - 2xy = 1$ ,  $y(x) = e^{x^2} \int_0^x e^{-t^2} dt + e^{x^2}$ .

**Aufgabe 15.2\***

Zeigen Sie, dass die gegebene Funktion oder die gegebenen Funktionen Lösungen der partiellen Differentialgleichung sind:

(a)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$ :  $u_1(x, y) = \cos x \cosh y$ ,  $u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ;

(b)  $\alpha^2 u_{xx} = u_t$ :  $u_1(x, t) = e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \sin(\lambda x)$ ,  $u_2(x, t) = (\pi/t)^{1/2} e^{-x^2/(4\alpha^2 t)}$ ,  
( $\lambda \in \mathbb{R}$  konstant,  $t > 0$  bei  $u_2$ ),

(c)  $a^2 u_{xx} = u_{tt}$ :  $u_1(x, t) = \sin(\lambda x) \sin(\lambda a t)$ ,  $u_2(x, t) = \sin(x - a t)$ ,  
 $u_3(x, t) = f(x - a t) + g(x + a t)$   
( $\lambda \in \mathbb{R}$  konstant,  $f$  und  $g$  zweifach differenzierbare Funktionen).

**Aufgabe 15.3**

Bestimmen Sie die Werte für  $r$ , für die die gegebenen Differentialgleichungen für  $x > 0$  Lösungen der Form  $y = x^r$  besitzen:

$$(a) \quad x^2 y'' + 4x y' + 2y = 0, \quad (b) \quad x^2 y'' - 4x y' + 4y = 0.$$

### Aufgabe 15.4\*

Bestimmen Sie die Werte für  $r$ , für die die gegebenen Differentialgleichungen Lösungen der Form  $y = e^{rx}$  besitzen:

$$(a) \quad y' + 2y = 0, \quad (b) \quad y'' - y = 0,$$

$$(c) \quad y'' + y' - 6y = 0, \quad (d) \quad y''' - 3y'' + 2y = 0.$$

### Aufgabe 15.5

Lösen Sie

$$(a^*) \quad e^x - y^2 e^x + (y + ye^x)y' = 0 \text{ (Trennung der Variablen),}$$

$$(b^*) \quad (2 + xy)e^{xy} + x^2 e^{xy} y' = 0 \text{ (integrierender Faktor),}$$

$$(c) \quad (1 - xy)e^{-y(x-1)} - (x^2 - x)e^{-y(x-1)} y' = 0 \text{ mit } y(2) = 0 \text{ (AWP).}$$

### Aufgabe 15.6\*

Zeigen Sie, daß sich die DGL  $y'(x) = f(ax + by + c)$ ,  $b \neq 0$ , durch die Substitution  $z = ax + by + c$  in eine DGL mit getrennten Variablen überführen läßt, ebenso  $y'(x) = f\left(\frac{y(x)}{x}\right)$  durch die Substitution  $z = \frac{y}{x}$ ,  $x \neq 0$ . Lösen Sie

$$a) \quad y' = x + y \quad \text{und} \quad b) \quad 2xyy' - y^2 + x^2 = 0.$$

### Aufgabe 15.7

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$(2x^2y + 1) dx + \left(\frac{2}{3}x^3 + y\right) dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

### Aufgabe 15.8\*

Lösen Sie das Anfangswertproblem

$$\left(\frac{2}{y} + \frac{1}{x^2 y^2}\right) dx + \left(\frac{2}{3} \frac{x}{y^2} + \frac{1}{x^2 y}\right) dy = 0, \quad y(0) = 2.$$

Hinweis: Nehmen Sie an, es gebe einen integrierenden Faktor  $M = M(z = x \cdot y)$ .

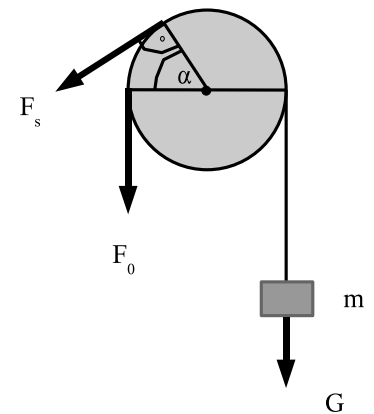
### Aufgabe 15.9

Eine arretierte Zylinderscheibe wird in der aus der Abbildung 1 ersichtlichen Weise von einem biegsamen Seil umschlungen, das am rechten Rand durch eine Gewichtskraft  $G = m \cdot g$  belastet wird. In Folge der Haftreibung zwischen Seil und Zylinderscheibe ist die Seilkraft  $S$  zwischen Seil und Zylinderscheibe nicht konstant, sondern eine noch vom Zentriwinkel  $\alpha$  abhängige Größe  $S = S(\alpha)$ . Im Gleichgewichtszustand genügt dabei die Seilkraft der Differentialgleichung

$$\frac{dS}{d\alpha} = \mu_0 S$$

mit dem Haftreibungskoeffizienten  $\mu_0 > 0$ .

- (a) Mit welcher Kraft  $F_0$  relativ zu  $G$  muß man am linken Seilende einwirken, um ein Abgleiten der Masse  $m$  zu verhindern, wenn der Haftreibungskoeffizient den Wert  $\mu_0 = 0.5$  besitzt?
- (b) Wie groß darf die am rechten Seilende befestigte Last  $F$  werden, wenn man das linke Seilende mit der Kraft  $F_0 = 100\text{N}$  festhält und das Seil die Zylinderscheibe genau 2.5 mal umschlingt?



**Abbildung 1:** Arretierte Zylinderscheibe

**Abgabe:** keine. Die Aufgaben werden in der ersten Globalübung (Math. Meth. im BW III) am 23.10.2006 besprochen.