

**Aufgabe 1**

Es sei  $C$  diejenige zusammengesetzte Kurve im  $\mathbb{R}^3$ , die entsteht, wenn die Punkte  $(1, 1, \pi)$ ,  $(4, 7, 3)$ ,  $(18, 2, 1)$ ,  $(17, -4, 6)$  und  $(9, -2, 0)$  geradlinig und in dieser Reihenfolge miteinander verbunden werden. Ein Vektorfeld  $\underline{a}(\underline{x})$  ist gegeben durch:

$$\underline{a}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2xyz - \sin z \\ x^2z + 2z^2 \\ x^2y + 4yz - x \cos z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie  $\int_C \underline{a} d\underline{x}$ .

**Aufgabe 2**

Die Folge  $a_n$  sei rekursiv definiert auf folgende Weise:

$$a_1 = 2, \quad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{2a_n}, \quad n \geq 1.$$

- Weisen Sie nach, dass gilt:  $a_{n+1} \geq \sqrt{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Sie dürfen voraussetzen, dass  $a_n > 0$  gilt.
- Weisen Sie mit vollständiger Induktion nach, dass gilt:  $a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Das Ergebnis aus a) darf/muss dabei benutzt werden.
- Zeigen Sie Monotonie der Folge  $a_n$  durch Nachweis der Ungleichung  $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$ .
- Begründen Sie die Konvergenz der Folge. Wie lautet der Grenzwert?

**Aufgabe 3**

Welche Punkte auf der Hyperbel  $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \mid x > 0, y > 0, xy = 1\}$  haben minimalen Abstand zum Punkt  $(2, 2)$ ?

**Aufgabe 4**

- Für eine Folge  $a_n$  gelte:  $a_n > \sqrt{n} > 0 \quad \forall n \in \mathbb{N}$ . Verwenden Sie das Prinzip der Einschachtelung, um zu zeigen, dass  $1/a_n$  eine Nullfolge ist.
- Welchen Grenzwert besitzt die Folge

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}?$$

**Aufgabe 5**

Mit der stetig differenzierbaren skalarwertigen Funktion  $g = g(u, v, w)$  sei

$$f(x, y) = 2^{g(xy \sin^2 x, \ln(\frac{1}{xy^2}), y)}, \quad x, y > 0.$$

Geben Sie  $f'$  an.