Aufgabe 1

Es sei C diejenige zusammengesetzte Kurve im $\mathbb{R}^3$, die entsteht, wenn die Punkte $(1, 1, \pi)$, $(4, 7, 3)$, $(18, 2, 1)$, $(17, -4, 6)$ und $(9, -2, 0)$ geradlinig und in dieser Reihenfolge miteinander verbunden werden. Ein Vektorfeld $\underline{a}(\underline{x})$ ist gegeben durch:

$$\underline{a}(\underline{x}) = \begin{pmatrix} 2xyz - \sin z \\ x^2z + 2z^2 \\ x^2y + 4yz - x\cos z \end{pmatrix}.$$

Berechnen Sie $\int_C \underline{a}\, d\underline{x}$.

Aufgabe 2

Die Folge a_n sei rekursiv definiert auf folgende Weise:

$$a_1 = 2, \qquad a_{n+1} = \frac{a_n}{2} + \frac{3}{2a_n}, \quad n \geq 1.$$

a) Weisen Sie nach, dass gilt: $a_{n+1} \geq \sqrt{3} \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Sie dürfen voraussetzen, dass $a_n > 0$ gilt.

b) Weisen Sie mit vollständiger Induktion nach, dass gilt: $a_n < 3 \quad \forall n \in \mathbb{N}$. Das Ergebnis aus a) darf/muss dabei benutzt werden.

c) Zeigen Sie Monotonie der Folge a_n durch Nachweis der Ungleichung $\frac{a_{n+1}}{a_n} \leq 1$.

d) Begründen Sie die Konvergenz der Folge. Wie lautet der Grenzwert?

Aufgabe 3

Welche Punkte auf der Hyperbel $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 \,|\, x > 0,\, y > 0,\, xy = 1\}$ haben minimalen Abstand zum Punkt $(2, 2)$?

Aufgabe 4

a) Für eine Folge a_n gelte: $a_n > \sqrt{n} > 0\ \forall n \in \mathbb{N}$. Verwenden Sie das Prinzip der Einschachtelung, um zu zeigen, dass $1/a_n$ eine Nullfolge ist.

b) Welchen Grenzwert besitzt die Folge

$$a_n = \sqrt{n + \sqrt{n}} - \sqrt{n}?$$

Aufgabe 5

Mit der stetig differenzierbaren skalarwertigen Funktion $g = g(u, v, w)$ sei

$$f(x, y) = 2^{g(xy\sin^2 x, \ln(\frac{1}{xy^2}), y)}, \quad x, y > 0.$$

Geben Sie f' an.

Aufgabe 6

Untersuchen Sie mit Hilfe der Cholesky-Zerlegung, ob die Matrix

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -1 \\ 3 & 13 & -1 \\ -1 & -1 & 6 \end{pmatrix}$$

positiv definit ist.