

Mathematische Methoden im Bauwesen I  
9. Übung

**Aufgabe 9.1**

Zeigen Sie mit dem Satz von L'Hospital:

- (a)  $\lim_{x \rightarrow -\infty} e^x \cdot x^n = 0$ ,
- (b) Folgern Sie aus (a):  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{e^x}{x^n} = \infty$ ,
- (c)  $\lim_{x \rightarrow 0, +} x \cdot \ln x = 0$ ,
- (d)  $\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{\ln x}{x} = 0$ .

**Aufgabe 9.2**

Ermitteln Sie  $\partial V / \partial x_1$  und  $\partial V / \partial x_2$  für die Funktion

$$V(u_1, u_2) = u_1^2 + 3u_1u_2 + 4u_2^2$$

mit  $u_1 = 2 - 2x_1x_2^2$  und  $u_2 = 1 + x_1$

- (a) mit Hilfe der Kettenregel,
- (b) durch Substitution von  $u_1$  und  $u_2$  in  $V$ .

**Aufgabe 9.3**

Gegeben sei die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit  $f(x, y) = xy + 2x \sin(y + \frac{\pi}{2}) + e^{-y} \cos x$ .

- (a) Berechnen Sie die Richtungsableitung  $\partial f / \partial \underline{b}$  von  $f$  im Punkt  $\underline{x}_0 = (0, 0)$  in die durch den Vektor  $(-3, 1)$  gegebene Richtung.
- (b) In welcher Richtung  $\underline{b}$  wird  $|\frac{\partial f}{\partial \underline{b}}(\underline{x}_0)|$  maximal?
- (c) Gibt es Richtungen, für die  $\frac{\partial f}{\partial \underline{b}}(\underline{x}_0) = \underline{0}$  gilt?

### Aufgabe 9.4

Für differenzierbares  $f : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}$  ist die Ableitung von  $f$  in Richtung  $\underline{A} = (a_1, \dots, a_m) \in \mathbb{R}^m$  im inneren Punkt  $\underline{x}_0 \in \mathbb{R}^m$

- ( )  $\text{grad}f(\underline{A})$ ,
- ( )  $\underline{x}_0 \cdot \text{grad}f(\underline{A})$ ,
- ( )  $\underline{A} \cdot \text{grad}f(\underline{x}_0)$ , falls  $|\underline{A}| = 1$ .

### Aufgabe 9.5\*

Durch  $T : [-5; 5]^3 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$T(x, y, z) = xyz \sin(xy)e^{-z}$$

sei ein Temperaturfeld gegeben.

- (a) Bestimmen Sie die Änderung der Temperatur (pro Längeneinheit) in der Umgebung des Punktes  $P = (1, 1, 1)$  sowohl in Richtung der Koordinatenachsen als auch in Richtung des Vektors  $(1, 1, 1)$ .
- (b) In welcher Richtung von  $P$  aus ändert sich das Temperaturfeld (pro Längeneinheit) am meisten?
- (c) Gibt es von  $P$  aus Richtungen, in denen die Temperatur unverändert bleibt?

### Aufgabe 9.6\*

Eine partielle Differentialgleichung ist eine Gleichung, in der eine Funktion gesucht ist, die von mehreren Veränderlichen abhängt. In der Gleichung tauchen partielle Ableitungen der gesuchten Funktion auf. Zeigen Sie, dass die gegebene Funktion oder die gegebenen Funktionen Lösungen der partiellen Differentialgleichung sind:

- (a)  $u_{xx} + u_{yy} = 0$  :  $u_1(x, y) = \cos x \cosh y$ ,  $u_2(x, y) = \ln(x^2 + y^2)$ ;
- (b)  $\alpha^2 u_{xx} = u_t$  :  $u_1(x, t) = e^{-\alpha^2 \lambda^2 t} \sin(\lambda x)$ ,  $u_2(x, t) = (\pi/t)^{1/2} e^{-x^2/(4\alpha^2 t)}$ ,  
( $\lambda \in \mathbb{R}$  konstant,  $t > 0$  bei  $u_2$ ),
- (c)  $a^2 u_{xx} = u_{tt}$  :  $u_1(x, t) = \sin(\lambda x) \sin(\lambda a t)$ ,  $u_2(x, t) = \sin(x - a t)$ ,  
 $u_3(x, t) = f(x - a t) + g(x + a t)$   
( $\lambda \in \mathbb{R}$  konstant,  $f$  und  $g$  zweifach differenzierbare Funktionen).

### Aufgabe 9.7\*

Betrachten Sie die Funktion  $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$  mit

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{xy^3}{x^2+y^2} & \text{für } (x, y) \neq (0, 0), \\ 0 & \text{für } (x, y) = (0, 0). \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass die partiellen Ableitungen  $f_x$  und  $f_y$  für alle  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  existieren und stetige Funktionen bilden. Zeigen Sie über die (ursprüngliche) Definition, dass die partiellen Ableitungen  $f_{xy}$  und  $f_{yx}$  im Nullpunkt existieren, aber nicht identisch sind. Was folgern Sie daraus?

**Bemerkung:** Die mit \* gekennzeichneten Aufgaben werden in der Globalübung besprochen, die anderen in den kleinen Übungen.

**Bearbeitungsziel:** Donnerstag, 21.12.2006, bis 12.30 Uhr