Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
AOR Dr. A. Langer

02.02.2007

Mathematische Methoden im Bauwesen I

14. Übung

Aufgabe 14.1

Geben Sie für die Schraubenlinie mit der Parameterdarstellung

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} r\cos t \\ r\sin t \\ a \cdot t \end{pmatrix}, \quad 0 \le t < \infty$$

den Krümmungsradius und die Torsion an. Geben Sie den Mittelpunkt des Krümmungskreises für den Kurvenpunkt $\underline{x}(\pi)$ an.

Aufgabe 14.2

Eine Verkehrsmaschine fliegt auf einem nördlichen Breitenkreis (geographische Breite $\frac{\pi}{4}$) von Europa nach Nordamerika. Die Entfernung von Start- und Zielort ist gleich einem Viertel des Breitenkreisumfangs. Während des Fluges sondert das Flugzeug Schadstoffe nach der Formel

$$f(x, y, z) = c\,[1 + \cos(4 \arctan \frac{y}{x})], \quad c > 0,$$

ab. Die jeweilige Flughöhe ist im Vergleich zum Erdradius (R=6370 km) vernachlässigbar. Zu berechnen ist die während des Fluges abgegebene Schadstoffmenge M.

Hinweis: Skizze anfertigen! Eine Parametrisierung der zu fliegenden Strecke erhält man unter Nutzung sog. *Kugelkoordinaten*

$$\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} R\cos\Phi\cos t \\ R\cos\Phi\sin t \\ R\sin\Phi \end{pmatrix}.$$

Dabei ist Φ die geographische Breite, t der Bereich für die geographische Länge, in dem wir uns bewegen und den wir als $[0; \frac{\pi}{2}]$ annehmen dürfen (warum?).

Aufgabe 14.3

Berechnen Sie für $a \in \mathbb{R}_+$ die Koordinaten des Schwerpunktes eines vollen Bogens der Zykloide

$$C: \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} a(t - \sin t) \\ a(1 - \cos t) \end{pmatrix}, \qquad 0 < t < 2\pi,$$

mit der Massenverteilung $\mu(x,y) = \sqrt{y}$. Wie groß ist die Gesamtmasse M der Kurve?

Aufgabe 14.4
Berechnen Sie die Koordinaten des Schwerpunktes der (mit einer homogenen Masseverteilung $\mu \in \mathbb{R}_+$ belegten) Kurve

$$C: \quad \underline{x}(t) = \begin{pmatrix} e^{-t}\cos t \\ e^{-t}\sin t \\ e^{-t} \end{pmatrix}, \qquad 0 < t < \infty.$$

Aufgabe 14.5
In der Leichtathletik ist für die beim Hochsprung erreichbare Höhe der Schwerpunkt des über die Hochsprunglatte zu bewegenden Körpers entscheidend. *Fosbury-Flop* heißt eine nach dem Amerikaner R. Fosbury (*1947) benannte Hochsprungtechnik. Dabei überquert der Springer die Latte mit Kopf und Schulter voraus und er landet auf Schulter und Rücken.

Bestimmen Sie zunächst den Schwerpunkt eines Viertelkreisbogens bei homogener Massenverteilung. Wo liegt der Vorteil der Fosbury-Technik?

Aufgabe 14.6
Berechnen Sie das Integral

$$I = \int_C xy\,ds,$$

wobei sich die (geschlossene) Kurve C aus folgenden Teilstücken zusammensetzt:

a) das Geradenstück zwischen den Punkten $P_1(0,0,0)$ und $P_2(1,0,0)$,

b) die Verbindung der Punkte P_2 und $P_3(1,1,1)$ durch einen Teil der Kurve mit der Parameterdarstellung $\underline{x}(t) = \begin{pmatrix} 1 \\ t \\ t^2 \end{pmatrix}$, $t \in \mathbb{R}$,

c) das Geradenstück von P_3 nach P_1.

Kann I Null ergeben? Muss I Null ergeben?

Bemerkung: Die Aufgaben werden nicht korrigiert, aber im Sommersemester in der dienstags stattfindenden Globalübung in der 2. Semesterwoche besprochen.