Aufgabe 1 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Eine Kurve C ist stückweise zusammengesetzt aus drei Kurvenstücken C_1, C_2 und C_3. C_1 ist der Graph von $f_1 : [0;1] \to \mathbb{R}$ mit $f_1(x) = x^2$. C_2 ist der Graph von $f_2 : [1,2] \to \mathbb{R}$ mit $f_2(x) = \sqrt{x}$. C_3 ist das Geradenstück vom Punkt $(2, \sqrt{2})$ zum Punkt $(3, \pi)$.

a) Skizzieren Sie C.

b) Geben Sie Parametrisierungen von C_1, C_2 und C_3 an.

c) Integrieren Sie das Vektorfeld $\underline{a}(\underline{x}) = \binom{3xy^2}{2y}$ über C_2.

d) Integrieren Sie das Vektorfeld $\underline{a}(\underline{x}) = \binom{2xy+\sin y}{x^2+x\cos y+2y}$ über C.

Aufgabe 2 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Die Funktion $f : [2;3] \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x$ ist integrierbar. Berechnen Sie

$$\int_2^3 x\,dx$$

als Grenzwert von Summenzerlegungen.

Aufgabe 3 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Ein quaderförmiger, geschlossener Behälter soll bei gegebenem Volumen $V > 0$ mit möglichst geringem Materialaufwand hergestellt werden. Wie sind seine Kantenlängen zu wählen und wieviel Material wird dann verbraucht? Begründen Sie, dass ein maximaler Materialaufwand nicht existieren kann.

Aufgabe 4 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Gegeben sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) = x^2 - 1$.

a) Geben Sie zu den Daten $(-1, f(-1))$, $(0, f(0))$ und $(1, f(1))$ das Ausgleichpolynom 2. Grades nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate an.

b) Geben Sie $s \in \mathbb{R}$ so an, dass sich das in a) berechnete Ausgleichspolynom 2. Grades (nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate) nicht ändert, wenn Sie den Messwert $(6, s)$ hinzunehmen. Begründen Sie Ihre Wahl.

c) Bestimmen Sie das lineare Ausgleichspolynom nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate zu den Daten aus a).

Aufgabe 5 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Eine Zahlenfolge sei rekursiv gegeben durch

$$a_0 = 2, \quad a_1 = 5, \quad a_n = 5a_{n-1} - 4a_{n-2},\ n \geq 2.$$

Zeigen Sie durch vollständige Induktion, dass für das allgemeine Glied die Darstellung gilt:

$$a_n = 4^n + 1, \quad n \geq 0.$$

Aufgabe 6 **(Handrechnung, kein Taschenrechner!!)**

Gegeben sei für $x > 0$ die Funktion $f(x) = \ln(1 + x)$. Bestimmen Sie die Taylorreihe von f um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$. Gehen Sie wie folgt vor:

(a) Bestimmen Sie die ersten 5 Ableitungen von f.

(b) Geben Sie die n-te Ableitung allgemein an und beweisen Sie dies durch vollständige Induktion.

(c) Geben Sie das n-te Taylorpolynom um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ an.

(d) Zeigen Sie, dass das Restglied R_n für $n \to \infty$ gegen 0 strebt.