Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
AOR Dr. A. Langer

13.12.2005

Mathematische Methoden im Bauwesen I

9. Übung

Aufgabe 9.1*

Konvergiert die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+1)}?$$

Können Sie den Reihenwert angeben?

Hinweis: Betrachten Sie die n-te Partialsumme. Betrachten Sie deren Summanden als Summe von Brüchen.

Aufgabe 9.2

Angesichts der Lage auf dem Arbeitsmarkt sieht sich die Bundesregierung veranlasst, eine zusätzliche Milliarde Euro für bestimmte Projekte auszugeben, ohne dass dieser Betrag durch Steuern wieder eingenommen wird (kleines Konjunkturprogramm).

Statistiker behaupten, dass jede Firma und jede Einzelperson (produzierende und konsumierende Mitglieder einer Volkswirtschaft) 90% der jeweiligen Einnahmen wieder ausgibt, die restlichen 10% jedoch spart.

Idealisierend nehmen wir an, dass sich dieser Prozess unendlich oft wiederholt.

a) Wie verändert sich in der Bundesrepublik Deutschland - unter Vernachlässigung außenwirtschaftlicher Einflüsse - die Gesamtsumme der Ausgaben durch das kleine Konjunkturprogramm?

b) Man beantworte a) für den (aktuellen) Fall, dass sich in unserem Lande die Sparneigung verdoppelt.

Aufgabe 9.3

Wahr oder falsch? Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge reeller Zahlen. Die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ ist konvergent, wenn gilt:

( ) $\lim\limits_{k\to\infty} a_k = 0$,

( ) $\lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=0}^{n} a_k$ existiert,

( ) die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} |a_k|$ konvergiert,

( ) für jedes $\epsilon > 0$ existiert ein $n_0(\epsilon) \in \mathbb{N}$ so, dass für alle $m \geq n > n_0(\epsilon)$ gilt:

$$|\sum_{k=n}^{m} a_k| < \epsilon$$

.

Aufgabe 9.4
Sei $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ eine beliebige Folge reeller Zahlen. Welche Aussagen sind für die „Teleskopreihe“ $\sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+1} - a_k)$ richtig?

( ) Für die Folge $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}$ der Partialsummen $s_n = \sum_{k=0}^{n}(a_{k+1} - a_k)$ gilt: $s_n = a_{n+1} - a_0$.

( ) Wenn die Teleskopreihe konvergiert, dann konvergiert die Folge $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$.

( ) Gilt $\lim_{k\to\infty} a_k = a$, $a \in \mathbb{R}$, dann konvergiert die Teleskopreihe, und es ist

$$\sum_{k=0}^{\infty}(a_{k+1} - a_k) = a - a_0.$$

Aufgabe 9.5
In der Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ sei $a_k = (-1)^k\, b_k$ für $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt:

( ) Die Reihe ist alternierend.

( ) Die Reihe ist alternierend, falls $b_k \geq 0$ für $k \in \mathbb{N}$.

( ) Die Reihe ist konvergent, falls sie alternierend ist mit $b_{k+1} \leq b_k$ für $k \in \mathbb{N}$.

( ) Die Reihe ist konvergent, falls sie alternierend ist mit $b_{k+1} \leq b_k$ für $k \in \mathbb{N}$ und $\lim_{k\to\infty} b_k = 0$.

Aufgabe 9.6
Seien $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ zwei Reihen und $\sum_{k=1}^{\infty} b_k$ konvergent. Was ist dann richtig?

( ) Gilt $a_k \leq b_k$ für $k \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent.

( ) Gilt $|a_k| \leq b_k$ für $k \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ absolut konvergent.

( ) Gilt $|a_k| \leq b_k$ für $k \in \mathbb{N}$, so ist die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^k\, a_k$ konvergent.

Aufgabe 9.7*
Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz oder Divergenz. Geben Sie bei den konvergenten Reihen auch an, ob diese auch absolut konvergieren.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n+1)^2}{2^n}$

b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{n+1}}(-1)^{n+1}$

c) $\displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{\binom{n}{2}}{n^2}$

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n}{\sqrt{n!}}$

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(3n^2+1)^n}{(2n)^{2n}}$

f) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{\arctan(\sqrt{2n})}{\sqrt{n!}}$

Aufgabe 9.8*

Zeigen Sie mit Hilfe des Cauchy-Produktsatzes: $e^x \cdot e^y = e^{x+y}$.

Aufgabe 9.9

Gegeben seien die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n^n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n(-1)^n}{2^n} x^n$ für $x \in \mathbb{R}$.

a) Für welche $x \in \mathbb{R}$ konvergieren diese Reihen? Liegt auch absolute Konvergenz vor?

(b) Geben Sie die ersten zwei Glieder der Cauchy-Produktreihe an. Wo konvergiert diese Reihe?

Aufgabe 9.10

Geben Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{n=2}^{\infty} \frac{x^n}{\sqrt{n^2-1}}$$

an.

Bemerkung: Die mit * gekennzeichneten Aufgaben werden in der Globalübung besprochen, die anderen in den kleinen Übungen.

Bearbeitungsziel: Dienstag, 03.01.2006, bis 12.30 Uhr