Universität Dortmund
Fachbereich Mathematik
AOR Dr. A. Langer

31.01.2006

Mathematische Methoden im Bauwesen I

14. Übung

Aufgabe 14.1*

Wurfparabel eines Wasserstrahls: Ein Zylinder sei bis zur Höhe H mit Wasser gefüllt. In der Tiefe h (von der als unveränderlich angenommenen Wasseroberfläche aus gerechnet) befindet sich eine seitliche Öffnung, aus der das Wasser in waagerechter Richtung mit der nach der Formel $v_0 = \sqrt{2gh}$ berechneten Geschwindigkeit austritt (g: Erdbeschleunigung). Ziel ist es, eine Öffnung so an einer Stelle A des Gefäßes anzubringen, daß der seitlich austretende Wasserstrahl den Boden an einer möglichst weit entfernten Stelle B (in horizontaler Richtung gemessen) trifft. Gehen Sie dazu wie folgt vor:

(i) Skizzieren Sie das Problem.

(ii) Geben Sie die (x, y)-Koordinaten zur Zeit $t \geq 0$ an. Betrachten Sie dabei die Bewegung des Wasserstrahls als waagerechten Wurf im luftleeren Raum. Hinweis: Um welche Bewegungen handelt es sich jeweils in x- und y-Richtung? Verwenden Sie die entsprechenden Weg-Zeit-Gesetze.

(iii) Eliminieren Sie den Zeitparameter und geben Sie die Wurfparabel $y(x)$ an.

(iv) Welche y-Koordinate hat der Auftreffpunkt (x_w, y_w)? Verwenden Sie die Antwort, um die x-Koordinate $x_w = x_w(h)$ anzugeben.

(v) Lösen Sie das Extremwertproblem und geben Sie die erreichte Weite an.

Aufgabe 14.2*

Gaußsche Normalverteilung: Meßwerte und Meßfehler einer Größe x unterliegen in der Regel der sog. Gaußschen Normalverteilung mit der Verteilungsdichtefunktion

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\,\sigma} \cdot e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)^2}, \qquad -\infty < x < \infty.$$

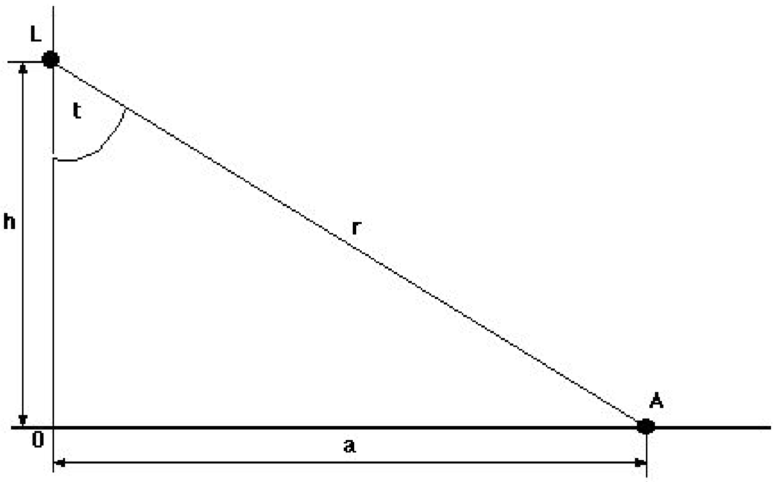
Dabei sind $\mu > 0$ und $\sigma > 0$ die *Kennwerte* der Verteilung (μ: Mittelwert oder Erwartungswert, σ: Standardabweichung).

(i) Bestimmen Sie die Extremwerte und Wendepunkte der Verteilungskurve und zeigen Sie, daß diese durch die beiden Kennwerte eindeutig festgelegt sind.

(ii) Skizzieren Sie den Verlauf dieser Funktion.

Aufgabe 14.3

Aufgabe (Optimale Beleuchtung eines Punktes durch eine Lichtquelle): Ein fester Punkt A einer ebenen Bühne wird durch eine in der Höhe verstellbare punktförmige Lichtquelle L mit der konstanten Lichtstärke I_0 beleuchtet (s. Skizze).



Die von der Lichtquelle im Punkt A erzeugte Beleuchtungsstärke B genügt dabei dem *Lambertschen Gesetz*

$$B = \frac{I_0 \cdot \cos t}{r^2}.$$

Dabei ist t der Einfallswinkel des Lichtes und r der Abstand zwischen der Lichtquelle und dem Punkt A. In welcher Höhe h über der Bühne muß man die Lichtquelle anbringen, damit der Punkt A optimal beleuchtet wird, d.h. damit die Beleuchtungsstärke B im Punkt A ihren größtmöglichen Wert erreicht? Gehen Sie zur Lösung dieser Aufgabe wie folgt vor:

(i) Stellen Sie zunächst die Beleuchtungsstärke B als eine nur von der Höhe h abhängige Funktion dar (die Abstandsgröße a ist vorgegeben). Hinweis: Beziehungen im rechtwinkligen Dreieck.

(ii) Maximieren Sie die Funktion der Beleuchtungsstärke $B(h)$, und geben Sie die erreichte Beleutchtungsstärke im Punkt A an.

Aufgabe 14.4

Untersuchen Sie die Funktionen auf lokale Extrema:

(a*) $f(x,y) = \frac{1}{2}(x^2+1) - 2y(2x+7) + 3x + 9y^2$,

(b) $f(x,y) = (x^3 - 3x)(y+3) + y(y+6)$,

(c) $f(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}(x^2+2y^2)$.

Aufgabe 14.5*

Für welchen Punkt $P(x, y)$ ist die Summe der Quadrate der Entfernungen von den Punkten $P_i(x_i, y_i)$, $i = 1, \ldots, n$, möglichst klein?

Aufgabe 14.6*

Ein zeitabhängiger Vorgang werde durch $g(t) = A \cdot e^{-Bt}$ beschrieben ($A > 0$). Zur Bestimmung von A und B stehen die Daten

t_i	20	40	60	80
g_i	2,70	1,50	0,80	0,43

zur Verfügung. Durch welche Transformation $y = y(g)$, $x = x(t)$ wird die Gleichung für $g(t)$ in eine Geradengleichung $y = ax + b$ überführt? Ermitteln Sie nach der Methode der kleinsten Fehlerquadrate a und b. Geben Sie $g(t)$ an.

Aufgabe 14.7

Von einem Gas wurden der Druck p und das Volumen V gemessen. Man erhielt als Messwerte:

V	54,3	61,8	72,4	88,7	118,6	194,0
p	61,2	49,5	37,6	28,4	19,2	10,1

.

Bestimmen Sie die Konstanten κ und C für die adiabetische Zustandsänderung $pV^\kappa = C$ mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate. Beachten Sie Aufgabe 14.6.

Aufgabe 14.8

Nach dem Keplershen Gesetz bewegt sich ein Himmelskörper im Sonnensystem auf einer ebenen Bahn von Ellipsen- oder Hyperbelform, wenn Störungen durch die Planeten vernachlässigt werden. Es bezeichnen (r, φ) Polarkoordinaten bzgl. des Standorts der Sonne. Die Bahn des Himmelskörpers ist dann gegeben durch die Kegelschnittgleichung

$$r = \frac{p}{1 - e\cos\varphi}$$

mit einem Parameter p und der sog. Exzentrizität e. Für $0 \le e < 1$ handelt es sich um eine Ellipse, für $e > 1$ um eine Hyperbel.

Für einen neu entdeckten Himmelskörper werden die folgenden Beobachtungen gemacht:

Tag	15.1.	15.4.	15.6.	15.8.	15.9.
r	10	5	2.5	1.3	1
φ	51°	67°	83°	108°	126°

Bringen Sie die Gleichung in eine Form, die linear in 2 Unbekannten ist. Bestimmen Sie mit Hilfe der Methode der kleinsten Fehlerquadrate den Typ der Bahn.

Aufgabe 14.9*
Gesucht sind die Seitenlängen x, y, z eines Dreiecks mit Umfang $U = 2$ so, daß der Flächeninhalt maximal wird. Dabei kann der Flächeninhalt A bei gegebenem Umfang U berechnet werden durch:

$$A(x, y, z) = \sqrt{\frac{U}{2}\,(\frac{U}{2} - x)\,(\frac{U}{2} - y)\,(\frac{U}{2} - z)}.$$

Geben Sie den Wert der maximal großen Fläche an.

Aufgabe 14.10
Geben Sie alle Extremstellen der Funktion $f(x, y)$ unter den Nebenbedingungen $g_i(x, y) = 0$ an:

(a*) $f(x, y) = x^2 + y^2$, $g_1(x, y) = 5x^2 + 5y^2 - 8xy - 18$,

(b) $f(x, y, z) = x + y + z$, $g_1(x, y, z) = x + z - 1$, $g_2(x, y, z) = x^2 + y^2 - 4$,

Hinweis bei (a): Die Fläche stellt einen ellipsenförmigen Zylinder dar.

Aufgabe 14.11
Man bestimme den kürzesten Abstand des Punktes $P(2, 2\sqrt{7}, 1/2)$ vom Rotationsparaboloiden $z = x^2 + y^2$.

Bemerkung: Die mit * gekennzeichneten Aufgaben werden in der Globalübung besprochen, die anderen in den kleinen Übungen.

Bearbeitungsziel: Dienstag, 07.02.2006, bis 12.30 Uhr