

Poissonintegraldarstellung.—Jede in $|z| < 1 + \delta$ harmonische Funktion läßt sich als Poissonintegral

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta}) u(e^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \quad (|z| < 1)$$

darstellen.

Beweis. Bei gegebenem $a \in \mathbb{D}$ ist die Funktion $U(z) = u\left(\frac{z+a}{1+\bar{a}z}\right)$ harmonisch in $\overline{\mathbb{D}}$, dies folgt aus der einfachen Tatsache, dass die Komposition $U = u \circ h$ einer harmonischen Funktion u mit einer holomorphen Funktion h wieder harmonisch ist: man ergänze u lokal zu $f = u + iv$ und beachtet $U = \operatorname{Re} f \circ h$. Die Mittelwertformel für U im Punkt $z = 0$ lautet, auf u umgeschrieben,

$$u(a) = \int_0^{2\pi} u\left(\frac{e^{i\theta} + a}{1 + \bar{a}e^{i\theta}}\right) \frac{d\theta}{2\pi}.$$

Schreibt man

$$z = e^{i\varphi} = \frac{e^{i\theta} + a}{1 + \bar{a}e^{i\theta}} \quad \text{und} \quad w = e^{i\theta} = \frac{e^{i\varphi} - a}{1 - \bar{a}e^{i\varphi}} = \frac{z - a}{1 - \bar{a}z},$$

so ergibt die Kettenregel in der Leibnizschen Schreibweise, wenn noch $z\bar{z} = 1$ berücksichtigt wird,

$$\begin{aligned} \frac{d\theta}{d\varphi} &= \frac{d\theta}{dw} \frac{dw}{dz} \frac{dz}{d\varphi} = \frac{1}{iw} \frac{1 - |a|^2}{(1 - \bar{a}z)^2} iz = \frac{1}{z - a} \frac{1 - |a|^2}{1 - \bar{a}z} z \\ &= \frac{1 - |a|^2}{\bar{z}(z - a)(1 - \bar{a}z)} = P(a, e^{i\varphi}); \end{aligned}$$

dies beweist

$$u(a) = \int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi}) \frac{d\theta}{d\varphi} \frac{d\varphi}{2\pi} = \int_0^{2\pi} u(e^{i\varphi}) P(a, e^{i\varphi}) \frac{d\varphi}{2\pi}. \quad \square$$

Bemerkung.—In einer beliebigen Kreisscheibe $|z - z_0| < R$ lautet die Formel

$$u(z) = \int_0^{2\pi} P(z - z_0, re^{i\theta}) u(z_0 + re^{i\theta}) \frac{d\theta}{2\pi} \quad (|z - z_0| < r < R).$$