Aufgaben zur Vorlesung Funktionentheorie I im WS 2009/10 (Maximumprinzip)

Die Lösungen werden nicht abgegeben, nicht korrigiert und nicht von mir vorgerechnet, sondern in den Übungen gemeinsam erarbeitet. Dies erfordert eine vorherige intensive Beschäftigung mit den Aufgaben und davon hängt auch die Zulassung zur Modulprüfung ab.

1. Man zeige, das für eine in $|z| < R$ subharmonische Funktion v der Mittelwert $m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} v(re^{i\theta})\,d\theta$ eine wachsende Funktion von r ist.

2. Man zeige, dass $\mathcal{C}^2$-Funktionen $v : D \longrightarrow \mathbb{R}$ mit $\Delta v > 0$ in D keine lokalen Maxima haben, deswegen dem Maximumprinzip genügen und subharmonisch sind.

3. Man bestimme das harmonische Maß von $\alpha = (-1, 1)$ in Bezug auf die obere Einheitskreisscheibe $\mathbb{D}^+ = \{z : |z| < 1,\ \operatorname{Im} z > 0\}$, d.h. die in $\mathbb{D}^+$ harmonische und beschränkte Funktion mit Randwerten $u(x) = 1$ $(-1 < x < 1)$ und $u(z) = 0$ $(|z| = 1, \operatorname{Im} z > 0)$.

4. Es sei f holomorph im Parallelstreifen $P : |\operatorname{Im} z| < h$ mit $\lim\limits_{z\to x\pm ih} |f(z)| \le 1$ $(x \in \mathbb{R})$. Man zeige, dass dann folgende Alternative besteht: Entweder ist

   a. $|f(z)| \le 1$ in P,

   oder es gilt mit einer Konstanten $c > 0$

   b. $\sup\limits_{-h<y<h} \log|f(x + iy)| \ge c\, e^{\frac{\pi}{2h}x} \quad (x \ge x_0)$.

Hinweise: Für $0 < r_1 < r_2 < R$ löse man $\Delta u = 0$ in $|z| < r_2$, $u = v$ auf $|z| = r_2$; Satz des Thales; $f\Big(\dfrac{2h}{\pi}\log z\Big)$ in $\operatorname{Re} z > 0$.

Funktionentheorie im Web: http://www.usfca.edu/vca/websites.html