technische universität dortmund fakultät für mathematik

Dynamische Systeme

Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Aufgaben zur Vorlesung Funktionentheorie I im WS 2009/10 (Vermischtes)

Die Lösungen werden nicht abgegeben, nicht korrigiert und nicht von mir vorgerechnet, sondern in den Übungen gemeinsam erarbeitet. Dies erfordert eine vorherige intensive Beschäftigung mit den Aufgaben und davon hängt auch die Zulassung zur Modulprüfung ab.

1. Man bestimme alle Möbiustransformationen, welche die Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$ auf sich abbilden.

2. Es sei f meromorph im Gebiet D und $S : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ eine Kugeldrehung. Man zeige ohne (aufwendige) Rechnung $(S \circ f)^{\#} = f^{\#}$ (sphärische Ableitung).

3. Es sei $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ eine ganze Funktion mit $|f(z)| \le Ae^{B|z|}$. Man zeige:

   a. $\Phi(w) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n! a_n}{w^{n+1}}$ ist in $|w| > B$ holomorph; für $f(z) = \sin z$ ist Φ zu berechnen;

   b. $f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|w|=B+\epsilon} \Phi(w) e^{wz}\, dw$;

   c. $\Phi(w) = \int_0^\infty e^{-wx} f(x)\, dx$ in $\operatorname{Re} w > B$ und $\Phi(w) = \int_0^\infty e^{-we^{i\theta}x} f(xe^{i\theta}) e^{i\theta}\, dx$ in $\operatorname{Re}(e^{i\theta}w) > h(\theta) = \limsup_{r\to\infty} \frac{\log|f(re^{i\theta})|}{r}$; die Menge $\{w : \operatorname{Re}(e^{i\theta}w) > h(\theta)\}$ ist für festes θ und $h(\theta) \in \mathbb{R}$ zu skizzieren.

4. (fortgesetzt) f heißt **Boreltransformierte** von Φ. Man berechne f und $h(\theta)$ für $\Phi(w) = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{w - a_k}$ ($c_k \ne 0$, a_k paarweise verschieden) und skizziere die Menge $\{w : \operatorname{Re}(e^{i\theta}w) \le h(\theta)$ für $0 \le \theta \le 2\pi\}$ (z.B. $a_k = e^{2k\pi i/4}$, $1 \le k \le 4$).

5. Die nichtkonstanten holomorphen Funktionen $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ mit $|f(z)| \to 1$ für $|z| \to 1$ (d.h. $f(z) \to \partial\mathbb{D}$ für $z \to \partial\mathbb{D}$) sind die Blaschkeprodukte $B(z) = e^{i\alpha} \prod_{k=0}^{n} \frac{z - a_k}{1 - \bar{a}_k z}$ ($|a_k| < 1$, $\alpha \in \mathbb{R}$). Man zeige, dass die nichtkonstanten holomorphen Funktionen $f : \mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\} \longrightarrow \mathbb{H}$ mit $f(z) \to \partial\mathbb{H} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ für $z \to \partial\mathbb{H}$ rationale Funktionen sind, genauer die Form $f(z) = c_0 z - \sum_{k=1}^{m} \frac{c_k}{z - \xi_k}$ mit $c_k \ge 0$, $\sum_{k=0}^{m} c_k > 0$ und $\xi_k \in \mathbb{R}$ haben.

Hinweise: $|a_n| \le Ae^{Br}r^{-n}$; Stirlingsche Formel; $e^{i\theta} f(e^{i\theta}z) = \sum_{n=0}^{\infty} e^{i(n+1)\theta} a_n z^n$; $T(z) = \frac{i - z}{i + z}$ bildet $\mathbb{H}$ auf $\mathbb{D}$ ab und überführt $f : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{H}$ in $\tilde{f} = T \circ f \circ T^{-1} : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$.