Aufgaben zur Vorlesung Funktionentheorie I im WS 2009/10 (Möbiustransformationen)

Die Lösungen werden nicht abgegeben, nicht korrigiert und nicht von mir vorgerechnet, sondern in den Übungen gemeinsam erarbeitet. Dies erfordert eine vorherige intensive Beschäftigung mit den Aufgaben und davon hängt auch die Zulassung zur Modulprüfung ab.

1. Man zeige, dass die Juliamenge eines geraden (oder auch ungeraden) Polynoms P zum Ursprung punktsymmetrisch ist und überprüfe dies auch empirisch (d.h. anhand von Graphiken) für ausgewählte Polynome $P(z) = z^2 + c$ ($c = 1/4$, $c = i/3$, $c = -3/4 + i/10$ usw.). Was ergibt sich für Polynome der Form $P(z) = z^r(a_0 + a_1 z^m + a_2 z^{2m} + \cdots + a_k z^{km})$, wobei $0 \le r < m$, $m \ge 2$, $k \ge 1$ und $d = r + km \ge 2$ ist?
2. Ein Kreis auf S^2 ist der Schnitt einer Ebene in $\mathbb{R}^3$ mit S^2. Man zeige, dass unter stereographischer Projektion Kreise auf S^2 auf Kreise oder Geraden (inklusive ∞) in $\widehat{\mathbb{C}}$ abgebildet werden.
3. Man bestimme das Bild der Kreisscheiben $|z| < 1$ und $|z-1| < 1$ bzw. der Halbebenen $\operatorname{Im} z > 0$ und $\operatorname{Re} z < -1$ unter der Möbiustransformation $T(z) = 1 - 1/z$.
4. Wie sieht das Bild des Quadrates $0 < \operatorname{Re} z < 1$, $0 < \operatorname{Im} z < 1$ unter der Abbildung $T(z) = \dfrac{z+i}{z-1}$ aus?
5. Man bestimme diejenige Möbiustransformation T, welche die Punkte $0, -i, 2$ in dieser Reihenfolge auf die Punkte $\infty, -2, 1$ abbildet. Wohin wird unter T die rechte Halbebene abgebildet?
6. Es bedeute z_K den Spiegelpunkt von z am Kreis K. Man zeige: Die Abbildung $z \mapsto (z_K)_{K'}$ (K' ein weiterer Kreis) ist eine Möbiustransformation T. In welcher Beziehung steht T zur Abbildung $z \mapsto (z_{K'})_K$? Was ergibt sich für $K = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ und $K' = \{z : |z| = 1\}$? Wann ist T eine Ähnlichkeitstransformation $T(z) = az + b$?
7. Man bestimme das Bild der Lemniskate $\{z : |z^2 - 1| = 1\}$ unter Spiegelung an $|z| = 1$.
8. Zwei Möbiustransformationen $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ und T_1 heissen zueinander konjugiert, wenn es eine dritte Möbiustransformation S mit $S \circ T = T_1 \circ S$ gibt. Man zeige: Konjugation ist eine Äquivalenzrelation und die Zahl $\delta(T) = \dfrac{(a+d)^2}{ad-bc}$ ist unter Konjugation invariant.
9. Man bestimme eine Möbiustransformation, welche $\mathbb{D}$ auf sich und das Intervall $[0, \rho]$ auf $[-r, r]$ abbildet. Dabei ist $0 < \rho < 1$ beliebig vorgebbar, aber $0 < r < 1$ ist eindeutig bestimmt.

Hinweis zu Aufgabe 8. $ad - bc$ und $a + d$ sind Determinante und Spur von $\left(\begin{smallmatrix} a & b \\ c & d \end{smallmatrix}\right)$.