Aufgaben zur Vorlesung Funktionentheorie I im WS 2009/10 (Vermischtes)

Die Lösungen werden nicht abgegeben, nicht korrigiert und nicht von mir vorgerechnet, sondern in den Übungen gemeinsam erarbeitet. Dies erfordert eine vorherige intensive Beschäftigung mit den Aufgaben und davon hängt auch die Zulassung zur Modulprüfung ab.

1. Es sei $\mu(n) = (-1)^m$, wenn n das Produkt von m *verschiedenen* Primzahlen ist, und $\mu(n) = 0$ sonst, ebenso $\Lambda(n) = \log p$ wenn $n = p^m$, p eine Primzahl, und $\Lambda(n) = 0$ sonst. Man zeige für $\operatorname{Re} s > 1$
$$\frac{1}{\zeta(s)} = \sum_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}, \quad \frac{\zeta(s)}{\zeta(2s)} = \sum_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| n^{-s} \quad \text{und} \quad \frac{\zeta'(s)}{\zeta(s)} = -\sum_{n=1}^{\infty} \Lambda(n) n^{-s}.$$

2. Welche der nachstehenden Familien $\mathcal{F}$ holomorpher Funktionen f ist lokal beschränkt in ihrem Definitionsgebiet D (manchmal in Abhängigkeit vom Parameter h)?

   a. $f(z) = \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kz$ $(n \in \mathbb{N},\ |a_k| \le 3^{-k})$ in $D = \{z : |\operatorname{Im} z| < h\}$.

   b. $f : \mathbb{D} \longrightarrow \{w : \operatorname{Re} w > 0\}$.

   c. $f : \mathbb{D} \longrightarrow \{w : |\operatorname{Im} w| < \frac{\pi}{2}\}$, $f(0) = 0$.

3. Die Folge (z^n) ist in keinem Gebiet um den Punkt $z = 1$ normal. Man zeige: Die Anwendung des Lemmas von Zalcman ergibt nur (ganze und) nullstellenfreie Grenzfunktionen. Haben alle die Form e^{az+b} $(a \ne 0)$?

4. Welche der nachstehenden Familien $\mathcal{F} = \{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ ist normal in $\mathbb{D}$?

   a. $f_n(z) = f^{(n)}(z)$, wobei f eine ganze Funktion ist, die $|f(z)| \le Ae^{h|z|}$ erfüllt.

   b. $f_n(z) = \dfrac{\sin nz}{n^2}$.

   c. $f_n(z) = \wp(z + a_n)$, wo (a_n) eine beliebige Folge komplexer Zahlen ist.

   d. $f_n(z) = \tan(z + a_n)$ ebenso.

5. Es sei $\mathcal{F}$ eine normale Familie holomorpher Funktionen $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$, die alle $f(0) = 0$ erfüllen. Man zeige, dass $\mathcal{F}$ lokal beschränkt und damit lokal Lipschitz-stetig ist.

6. Man bestimme die Picardschen Ausnahmewerte von $\dfrac{e^z - i}{(3+i)e^z + 4}$.

7. Es sei $0 < |q| < 1$. Man zeige, dass das Produkt $\prod_{n=1}^{\infty} (1 - q^n z)$ eine ganze Funktion f darstellt, und ermittle ihre Potenzreihenentwicklung aus der Funktionalgleichung $f(z) = (1 - qz) f(qz)$. Welche Wachstumsordnung hat f? Welche $f(e^z)$?

8. Es gibt 1-, 2-, 5-, 10-, 20-, und 50-Centmünzen. Für $n \in \mathbb{N}_0$ sei A_n die Anzahl der verschiedenen Möglichkeiten, eine Rechnung in Höhe von n Cent mit diesen Münzen zu bezahlen, d.h., A_n ist die Anzahl der Lösungen der *diophantischen* Gleichung

$$p_1 + 2p_2 + 5p_3 + 10p_4 + 20p_5 + 50p_6 = n \quad (p_\nu \in \mathbb{N}_0);$$

z.B. ist $A_0 = A_1 = 1$, $A_2 = A_3 = 2$. Man zeige, dass $\sum_{n=0}^{\infty} A_n z^n$ in $\mathbb{D}$ eine rationale Funktion darstellt. Welche? Gilt wirklich $A_{400} = 11\,060\,511$?

Hinweise:

a. $\dfrac{1}{\zeta(s)} = \prod_{n=1}^{\infty}(1 - p_n^{-s})$.

b. $\zeta = e^w$ bildet $\{w : |\mathrm{Im}\, w| < \frac{\pi}{2}\}$ bijektiv auf $\{\zeta : \mathrm{Re}\, \zeta > 0\}$ und 0 auf 1 ab.

c. Pólya-Szegö, *Aufgaben und Lehrsätze aus der Analysis I.*

Ich wünsche Ihnen ein Frohes Fest und einen Guten Rutsch ins Neue Jahr

$$\frac{\mathbf{A_{79} + A_{80}}}{\mathbf{2}}.$$