

Aufgaben zur Vorlesung Funktionentheorie I im WS 2009/10 (Elliptische Funktionen)

Die Lösungen werden nicht abgegeben, nicht korrigiert und nicht von mir vorgerechnet, sondern in den Übungen gemeinsam erarbeitet. Dies erfordert eine vorherige intensive Beschäftigung mit den Aufgaben und davon hängt auch die Zulassung zur Modulprüfung ab.

Die Funktionen σ , ζ und \wp sind zum Gitter $\Lambda = \omega_1\mathbb{Z} \oplus \omega_2\mathbb{Z}$ zu bilden.

1. Man untersuche, wie die Funktion f aus Aufgabe 4 des vorigen Blattes mit der in der Vorlesung behandelten Funktion Θ_0 zusammenhängt und bestimme so (oder direkt) die Nullstellen und die Produktdarstellung von f .
2. Man zeige, dass die zu Λ doppelperiodischen Funktionen (eingeschlossen die Konstanten) einen unter Differentiation abgeschlossenen Körper bilden.
3. (*1. Satz von Liouville*) Man zeige, dass eine nichtkonstante doppelperiodische Funktion nicht ganz sein kann.
4. Mit Hilfe der Differentialgleichung der P-Funktion ist \wp'' durch \wp und \wp''' durch \wp und \wp' auszudrücken. Allgemein ist

$$\wp^{(2n)} = Q_{2n}(\wp) \quad \text{und} \quad \wp^{(2n-1)} = Q_{2n-1}(\wp)\wp'$$

mit Polynomen Q_n ($n \in \mathbb{N}$) zu zeigen.

5. (*Zeta-Funktion*) Man zeige, dass $f(z) = \frac{\sigma(nz)}{\sigma(z)^{n^2}}$ ($n \in \mathbb{N}$) zum Gitter Λ doppelperiodisch ist. Welche elliptische Ordnung hat f ?
6. (*Verdopplungsformel*) Man zeige $\wp'(z) = -\frac{\sigma(2z)}{\sigma(z)^4}$ (Hinweis: Beide Seiten sind ungerade!), folgere $\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)} = 2\zeta(2z) - 4\zeta(z)$ sowie $\wp(2z) = \frac{1}{4}\left(\frac{\wp''(z)}{\wp'(z)}\right)^2 - 2\wp(z)$ und drücke so $\wp(2z)$ rational durch $\wp(z)$ aus.
7. Man stelle $\wp(z + \frac{1}{2}\omega_1) - e_1$ in der Form $\frac{a\wp(z) + b}{c\wp(z) + d}$ dar.