Aufgaben zur Vorlesung Funktionentheorie I im WS 2009/10
(Periodische Funktionen)

Die Lösungen werden nicht abgegeben, nicht korrigiert und nicht von mir vorgerechnet, sondern in den Übungen gemeinsam erarbeitet. Dies erfordert eine vorherige intensive Beschäftigung mit den Aufgaben und davon hängt auch die Zulassung zur Modulprüfung ab.

1. (*Trigonometrische Polynome*) Man zeige, dass eine ganze und 1-periodische Funktion f mit $|f(z)| = O(e^{M|\operatorname{Im} z|})$ für $|\operatorname{Im} z| \to \infty$ ein trigonometrisches Polynom $= \sum_{k=-m}^{m} c_k e^{2\pi i k z}$ ist; kann man m abschätzen?

2. Man bestimme die Fourierentwicklung von $f(z) = \tan \pi z$ in der oberen Halbebene $\operatorname{Im} z > 0$; ist es dieselbe wie in $\operatorname{Im} z < 0$?

3. (*Poissonsche Summenformel*) Es sei f im Parallelstreifen $S : |\operatorname{Im} z| < h$ holomorph mit $|f(z)| = O(|\operatorname{Re} z|^{-2})$ für $|\operatorname{Re} z| \to \infty$. Man zeige:

   a. Die Fouriertransformierte $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x) e^{-2\pi i x t}\, dx$ existiert ($t \in \mathbb{R}$ (!)).

   b*. Es gilt $\hat{f}(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x+iy) e^{-2\pi i (x+iy) t}\, dx$ $(-h < y < h)$.

   c. $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z+n)$ ist holomorph und 1-periodisch in S.

   d. Es gilt $\sum_{n=-\infty}^{\infty} f(z+n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \hat{f}(n) e^{2n\pi i z} \quad (z \in S)$.

4. (*Thetareihen*) Man bestimme alle nichttrivialen ganzen und 1-periodischen Funktionen $f(z) = \sum_{k=-\infty}^{\infty} c_k e^{2k\pi i z}$ mit $f(z+\tau) = e^{-2\pi i z - \pi i \tau} f(z)$ $(z \in \mathbb{C})$; τ mit $\operatorname{Im} \tau > 0$ ist dabei vorgegeben. Man zeige* $|f(z)| = O\Big(\exp \dfrac{\pi |z|^2}{\operatorname{Im} \tau}\Big)$.

5. Es sei Λ das von ω_1 und ω_2 aufgespannte Gitter ($\frac{\omega_2}{\omega_1} \notin \mathbb{R}$). Man zeige:

   a. $\sum_{\omega \neq 0} |\omega|^{-s}$ konvergiert für $s > 2$.

   b. $|z| < R$ enthält $\dfrac{\pi R^2}{F(\Lambda)} + O(R) \quad (R \to \infty)$ Gitterpunkte.

   c*. $F(\Lambda) = |\operatorname{Im}(\omega_1 \bar{\omega}_2)|$.