Aufgaben zur Vorlesung Funktionentheorie I im WS 2009/10 (Gamma- und Zetafunktion)

Die Lösungen werden nicht abgegeben, nicht korrigiert und nicht von mir vorgerechnet, sondern in den Übungen gemeinsam erarbeitet. Dies erfordert eine vorherige intensive Beschäftigung mit den Aufgaben und davon hängt auch die Zulassung zur Modulprüfung ab.

1. (*Satz von Liouville*) Man zeige: Eine ganze Funktion f mit $M(r_k, f) = O(r_k^m)$ für eine Folge $r_k \to \infty$ ist ein Polynom vom Grad $\leq m$.
2. (*Fouriertransformation*) $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{C}$ sei stetig und erfülle
$$f(t) = O(e^{-at}) \quad (t \to +\infty) \quad \text{und} \quad f(t) = O(e^{bt}) \quad (t \to -\infty),$$
wobei $a > 0$ und $b > 0$ sei. Man bestimme einen möglichst breiten Parallelstreifen $A < \operatorname{Im} z < B$, in dem die Fouriertransformierte $\hat{f}(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} f(t)e^{-2\pi i z t}\, dt$ holomorph ist.
3. Es sei $\hat{f}$ die Fouriertransformierte von $e^{-\lambda t^2}$ $(\lambda > 0)$. Man zeige
$$\hat{f}'(z) = \frac{-2\pi^2 z}{\lambda}\, \hat{f}(z)$$
und berechne so $\hat{f}$ explizit. (Hinweis: $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2}\, dt = \sqrt{\pi}$.)
4. (*Mellintransformation*) Es sei $F(z) = \displaystyle\int_0^{\infty} f(t)t^{z-1}\, dt$ die Mellintransformierte von $f : (0, \infty) \longrightarrow \mathbb{C}$, wobei f stetig sei und
$$f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k + o(t^n) \quad (t \to 0) \text{ sowie } f(t) = O(t^{-b}) \quad (t \to \infty)$$
erfülle. Man zeige, dass sich F holomorph von $\{z : 0 < \operatorname{Re} z < b\}$ nach
$$\{z : -n < \operatorname{Re} z < b,\ z \neq -n+1, \ldots, -1, 0\}$$
fortsetzen läßt. Welche Singularitäten liegen in den Ausnahmepunkten vor?
5. (*Gammafunktion*) Man zeige $\Gamma(z)\,\Gamma(1-z) = \dfrac{\pi}{\sin(\pi z)}$.
6. (*Primzahlen*) Man zeige, dass die Reihe $\displaystyle\sum_{(p)} p^{-1}$ divergiert (Euler).
7. (*Zetafunktion*) Man zeige $(1 - 2^{1-s})\zeta(s) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n-1} n^{-s}$ $(\operatorname{Re} s > 1)$ und beweise, dass die Dirichletreihe rechts in der Halbebene $\operatorname{Re} s > 0$ lokal gleichmäßig, aber nicht absolut, konvergiert.
8. (*Lebensaufgabe*) Man beweise, dass $\zeta(s)$ in $\operatorname{Re} s > \frac{1}{2}$ keine Nullstellen hat.