Lehrstuhl Dynamische Systeme
Prof. Dr. Norbert Steinmetz

# Aufgaben zur Vorlesung Funktionentheorie I im WS 2009/10
## (Ganze Funktionen)

Die Lösungen werden nicht abgegeben, nicht korrigiert und nicht von mir vorgerechnet, sondern in den Übungen gemeinsam erarbeitet. Dies erfordert eine vorherige intensive Beschäftigung mit den Aufgaben und davon hängt auch die Zulassung zur Modulprüfung ab.

1. (*Poissonkern von* $\mathbb{H}$) Es sei $P(z) = \operatorname{Im} \dfrac{-1}{\pi z} = \dfrac{y}{\pi(x^2+y^2)}$ $(z = x+iy,\ y>0)$, $h : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und beschränkt. Man zeige
   a. $P$ ist harmonisch in $\mathbb{H} = \{z : \operatorname{Im} z > 0\}$ und es gilt $\displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} P(z-t)\,dt = 1$.
   b. $u(z) = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} h(t)P(z-t)\,dt$ ist harmonisch in $\mathbb{H}$.
   c. $\lim\limits_{z\to x} u(z) = h(x)$ $(x \in \mathbb{R})$.

2. Es sei $f$ holomorph in $\mathbb{D}$ mit unendlich vielen Nullstellen und $\displaystyle\int_0^{2\pi} \big|\log|f(re^{i\theta})|\big|\,d\theta$ sei beschränkt. Man zeige, dass die Nullstellenfolge von $f$ die Blaschkebedingung erfüllt, somit $f = Be^g$ mit einem Blaschkeprodukt $B$ und einer in $\mathbb{D}$ holomorphen Funktion $g$ gilt.

3. Man bestimme die Wachstumsordnung der ganzen Funktionen

$$\text{a. } \cos z; \quad \text{b. } \cosh\sqrt{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{(2n)!}; \quad \text{c. } e^{\sin z};$$

$$\text{d. } e^{P(z)}; \quad \text{e. } \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{2^n}\Big); \quad \text{f. } \prod_{n=1}^{\infty}\Big(1+\frac{z}{n^\kappa}\Big);$$

   in d. ist $P$ ein Polynom vom Grad $m \ge 1$, in f. ist $\kappa > 1$.

4. Es sei $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{n!} z^n$ eine ganze Funktion. Man zeige

$$\log|f(z)| \le O(|z|) \quad (|z| \to \infty) \quad \Leftrightarrow \quad \log|a_n| \le O(n) \quad (n \to \infty).$$

5. Man bestimme die kanonische Produktdarstellung von $e^{az} - e^{bz}$ $(a \ne b)$.

6. Man bestimme eine ganze Funktion, die in den Punkten $m + in$ $(m, n \in \mathbb{N})$ einfache Nullstellen hat und sonst keine. Welche Wachstumsordnung hat sie mindestens?

7. (*Satz von Liouville*) Man zeige: Eine ganze Funktion $f$ mit $M(r_k, f) = O(r_k^m)$ für eine Folge $r_k \to \infty$ ist ein Polynom vom Grad $\le m$.