Aufgaben zur Vorlesung Funktionentheorie I im WS 2009/10
(Unendliche Produkte)

Die Lösungen werden nicht abgegeben, nicht korrigiert und nicht von mir vorgerechnet, sondern in den Übungen gemeinsam erarbeitet. Dies erfordert eine vorherige intensive Beschäftigung mit den Aufgaben und davon hängt auch die Zulassung zur Modulprüfung ab.

1. Man bestimme für $f(z) = \dfrac{2\pi i z^2}{e^{2\pi i z} - 1}$
   a. alle Polstellen und Hauptteile,
   b. die Partialbruchreihe und
   c. die Mittag-Leffler-Darstellung.
2. Dasselbe für $f(z) = \dfrac{1}{\cos z \, \cosh z}$.
3. Man zeige $\displaystyle\prod_{n=0}^{\infty}(1 + z^{2^n}) = \frac{1}{1-z}$ in $\mathbb{D}$.
4. Man untersuche folgende Produkte auf (absolute bzw. lokal gleichmässige) Konvergenz (Hinweis: $\log(1+u) = u + O(|u|^2)$ für $u \to 0$):
   a. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \cos\frac{z}{n}$
   b. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{(-1)^{n-1}}{n^z}\Big)$
   c. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n z^n)$, wenn $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$ den Konvergenzradius $r > 0$ hat.
   d. $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1 + f(z^n))$, wenn f in $\mathbb{D}$ holomorph und $f(0) = 0$ ist.
5. (*) Es sei (a_n), $0 < a_n < 1$, eine monoton fallende Nullfolge und $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^p$ sei für ein $p \in \mathbb{N}$ konvergent. Man zeige, dass $\displaystyle\prod_{n=1}^{\infty}(1 + a_n e^{2n\pi i/p})$ konvergiert. (Hinweis: $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} a_n^{\ell} e^{2n\ell\pi i/p}$ konvergiert für $\ell = 1, 2, \ldots, p-1$; warum? und was nützt das?)
6. Man bestimme eine in $\mathbb{D}$ holomorphe und beschränkte Funktion, deren Nullstellen sich in jedem Punkt von $\partial\mathbb{D}$ häufen.
7. Man bestimme eine ganze Funktion, die in $z = n$ $(= 1, 2, 3, \ldots)$ eine n-fache Nullstelle besitzt (und sonst keine).