Komplexe Dynamische Systeme
Vorlesung im Wintersemester 2007/2008
Universität Dortmund

Prof. Dr. Norbert Steinmetz[1]

Literatur zur Mathematik.
A.F. Beardon, *Iteration of Rational Functions*, Springer 1992.
L. Carleson, T.W. Gamelin, *Complex Dynamics*, Springer 1993.
P. Fatou, *Sur les équations fonctionelles*, Bulletin de la Société mathématique de France **47**, 161-271 (1919) und **48**, 33-94 & 208-314 (1920).
G. Julia, *Mémoire sur l'iteration des fonctions rationelles*, Journal de Mathématiques pures et appliquées **8**, 47-245 (1918). Grand Prix des Sciences mathématiques 1918.
J. Milnor, *Dynamics in One Complex Variable*, Vieweg 1999.
N. Steinmetz, *Rational Iteration. Complex Analytic Dynamical Systems*, deGruyter 1993.

Zur Geschichte.
D.S. Alexander, *A History of Complex Dynamics. From Schröder to Fatou and Julia*, vieweg 1994.

Zu Bildern.
H.-O. Peitgen, P.H. Richter, *The Beauty of Fractals. Images of Complex Dynamical Systems,* Springer 1986.

Pierre Fatou (1878-1929)

Gaston Julia (1893-1978)

[1]Hinweise auf Fehler und Ungenauigkeiten sind willkommen.

A. Die Theorie von Fatou und Julia

I Grundlegende Bezeichnungen

Bezeichnungen [Beispiele: Quadratische Polynome und Newtonverfahren]

(1) $R = P/Q$ ist eine rationale Funktion (P und Q teilerfremde Polynome) vom ***Grad*** $d = \deg R := \max\{\deg P, \deg Q\} > 1$. Dies ist auch der ***topologische Grad***: Die Gleichung $R(z) = w$, $w \in \widehat{\mathbb{C}}$ hat in $\widehat{\mathbb{C}}$ genau d Lösungen, mit Vielfachheit gezählt.

(2) R^n ist die n-te ***Iterierte*** von R: $R^0 = \mathrm{id}, R^1 = R, R^n = R \circ R^{n-1} = R^{n-1} \circ R$. Es ist $\deg R^n = d^n$.

(3) $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ heißt ***normal***, wenn die Folge (R^n) in einem Gebiet $D \ni z$ normal ist [dh. bekanntlich: Jede Teilfolge besitzt ihrerseits eine Teilfolge, die in D lokal gleichmäßig bzgl. der chordalen Metrik in $\widehat{\mathbb{C}}$ konvergiert. Die Grenzfunktion ist meromorph in D oder $\equiv \infty$]. Die Menge der normalen Punkte ist die ***Fatoumenge*** $\mathcal{F}$ von R. Sie ist definitionsgemäß offen.

(4) Die ***Juliamenge*** von R ist $\mathcal{J} = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{F}$; sie ist abgeschlossen, also kompakt.

(5) Jede Lösung $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ der Gleichung $R(z) = z$ heißt ***Fixpunkt*** von R. Es gibt, mit Vielfachheit gezählt, stets $d+1$ Fixpunkte. Z.B. ist $z = \infty$ (einfacher) Fixpunkt eines jeden Polynoms, und $z = 0$ ist dreifacher Fixpunkt von $z + z^3$.

(6) Der ***Multiplikator*** λ des Fixpunktes z_0 ist $\lambda = R'(z_0)$, falls $z_0 \in \mathbb{C}$. Für $z_0 = \infty$ ist $\lambda = R_1'(0)$, wo $R_1(z) = 1/R(1/z)$. Ein Polynom $P(z) = a_0 + \cdots a_d z^d$ hat im Fixpunkt $z = \infty$ den Multiplikator $\lambda = 0$, weil $P_1(z) = z^d/(a_d + \cdots a_0 z^d) = \frac{1}{a_d} z^d + \cdots$ bei $z = 0$. $R(z) = az + a_0 + a_1/z + \cdots$, $a \neq 0$, hat bei $z = \infty$ den Multiplikator $\lambda = 1/a$.

(7) Die Fixpunkte werden folgendermaßen eingeteilt: z_0 heißt
♣ ***superattraktiv***, falls $\lambda = 0$.
♠ ***attraktiv***, falls $0 < |\lambda| < 1$.
♡ ***indifferent*** oder ***neutral***, falls $|\lambda| = 1$.
♢ ***abstoßend***, falls $|\lambda| > 1$.
Die Fixpunkte ♣♠♢ heissen ***hyperbolisch.***

(7a) Feineinteilung der indifferenten Fixpunkte; $z_0 = R(z_0)$ mit $\lambda = e^{2\pi i \alpha}$ heißt
♡1 ***rational indifferent*** oder ***parabolisch***, falls $\alpha \in \mathbb{Q}$ (Einheitswurzel)
♡2 ***Siegel-Punkt***, falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $z_0 \in \mathcal{F}$.
♡3 ***Cremer-Punkt***, falls $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $z_0 \in \mathcal{J}$.
Die beiden letztgenannten werden auch als ***irrational indifferent*** bezeichnet.

(8) Ein Fixpunkt z_0 von R^p, $p \in \mathbb{N}$, heißt ***periodischer Punkt*** von R, und p seine ***Periode***, falls $R^j(z_0) \neq z_0$ für $1 \leq j < p$. Fixpunkte sind 1-periodisch.
z_0 erzeugt einen p-***Zyklus*** $\alpha = \{z_0, z_1, \ldots, z_{p-1}\}$, $z_j = R^j(z_0)$. Die z_j sind Fixpunkte von R^p, sie haben als solche alle den gleichen Multiplikator λ, dies ist auch der Multiplikator von α. Für $\infty \notin \alpha$ ist $\lambda = R'(z_0) \cdots R'(z_{p-1})$. Die Einteilung der Fixpunkte wird für Zykel übernommen. Man spricht von abstoßenden etc. Zykeln, aber auch etwas ungenau von attraktiven etc. periodischen Punkten. Z.B. hat $R(z) = z^2 - 1$ den superattraktiven 2-Zyklus $\{0, -1\}$, $R(z) = z^2 + i$ den abstoßenden 2-Zyklus $\{-1+i, -i\}$ mit $\lambda = 4(1+i)$.

(9) Ist R injektiv in einer Umgebung von z_0, so heißt z_0 ***regulärer Punkt***, ansonsten ***kritischer Punkt*** und $w_0 = R(z_0)$ dann ***kritischer Wert.*** Die Menge der kritischen Punkte wird mit $\mathcal{C}$ bezeichnet. In keiner Umgebung eines kritischen Wertes w_0 existieren alle d möglichen Umkehrfunktionen von R. Die Menge der kritischen Punkte von R^n ist $\bigcup_{\nu=0}^{n-1} R^{-\nu}(\mathcal{C})$, die der kritischen Werte dagegen $\bigcup_{\nu=1}^{n} R^{\nu}(\mathcal{C})$.
Für das Paar kritischer Punkt/kritischer Wert (z_0, w_0) gibt es vier Möglichkeiten:
♣ z_0, w_0 endlich: $R^{(j)}(z_0) = 0$ für $1 \leq j < k, R^{(k)}(z_0) \neq 0$, dh., z_0 ist k-fache w_0-Stelle.
♠ z_0 endlich, $w_0 = \infty$: z_0 ist k-fache Polstelle.
♡ $z_0 = \infty$, w_0 endlich: $R(z) = w_0 + a/z^k + a_1/z^{k+1} + \cdots$ bei $z = \infty$, $a \neq 0; \infty$ ist k-fache w_0-Stelle.
♢ $z_0 = w_0 = \infty$: $R(z) = az^k + a_1 z^{k-1} + \cdots$ bei $z = \infty$, $a \neq 0$ (typisch für Polynome); ∞ ist k-facher Pol.
In allen Fällen wird z_0 als $(k-1)$-facher kritischer Punkt gezählt. Es gibt, mit Vielfachheit gezählt, ***genau*** $2d - 2$ ***kritische Punkte.***

(10) Sind R und R_1 über eine Möbiustransformation M verbunden, $M \circ R = R_1 \circ M$, so heißen R und R_1 zueinander ***konjugiert,*** $R \sim R_1$. Die Konjugation $\sim$ ist eine Äquivalenzrelation. Es gilt (Kettenregel!):
a. Ist α ein p-Zykel von R mit Multiplikator λ, so ist $M(\alpha)$ ein p-Zykel von R_1 mit demselben Multiplikator.
b. Ist z_0 ein k-facher kritischer Punkt von R, so ist $M(z_0)$ ein k-facher kritischer Punkt von R_1.

(11) Für $z \in \widehat{\mathbb{C}}$ bzw. $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ heißt $\mathcal{O}^+(z) = \{R^n(z) : n \in \mathbb{N}\}$ bzw. $\mathcal{O}^+(E) = \{R^n(z) : z \in E, n \in \mathbb{N}\}$ ***Bahn*** oder ***Orbit*** von z bzw. E; $\mathcal{O}^+(z)$ wird oft als Folge aufgefasst. Dagegen muß man sich unter dem ***Rückwärtsorbit*** $\mathcal{O}^-(z) = \{w : R^n(w) = z \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$ eher einen Baum vorstellen.

Erläuterung der Begriffe an den Beispielsklassen:
a. Quadratische Polynome
b. Newtonverfahren
c. Blaschkeprodukte

II Einfache Eigenschaften

Die Begriffe $\mathcal{J}, \mathcal{F}$, usw. beziehen sich immer auf eine festgewählte rationale Funktion R. Abweichungen davon ergeben sich immer aus der Schreibweise. Es werden einige einfache Eigenschaften aufgelistet.

Satz 1 $\mathcal{J} \neq \emptyset$.

Satz 2 (Vollständige Invarianz) $\mathcal{J} = R(\mathcal{J}) = R^{-1}(\mathcal{J})$ *und* $\mathcal{F} = R(\mathcal{F}) = R^{-1}(\mathcal{F})$.

Satz 3 $\mathcal{J} = \mathcal{J}_{R^p}$ *und* $\mathcal{F} = \mathcal{F}_{R^p}$ *für alle* $p \in \mathbb{N}$.

Satz 4 $M \circ R = R_1 \circ M$, M *eine Möbiustransformation* $\Rightarrow \mathcal{F}_{R_1} = M(\mathcal{F})$ *und* $\mathcal{J}_{R_1} = M(\mathcal{J})$.

Satz 5 *(Super-) attraktive Zykel gehören zu* $\mathcal{F}$.

Satz 6 *Abstoßende und rational neutrale Zykel gehören zu* $\mathcal{J}$.

Der Index eines Fixpunktes. Ist $f(z) = z_0 + \lambda(z - z_0) + \cdots$ holomorph um $z = z_0$, so heisst $\iota_f(z_0) = \mathrm{Res}_{z_0}\, 1/(z - f(z))$ ***Index*** des Fixpunktes z_0 von f.

♣ Ist $\lambda \neq 1$, so ist $\iota_f(z_0) = 1/(1 - \lambda)$.
♠ Für $f(z) = (z - z_0) + a_1(z - z_0)^{s+1} + a_2(z - z_0)^{2s+1} + \cdots$, $a_1 \neq 0$, ist $\iota_f(z_0) = -a_2/a_1^2$.
♡ Allgemein ist ι invariant gegenüber lokalen Konjugationen: Ist $\phi(z) = z_0 + c_1(z - z_1) + \cdots$, $c_1 \neq 0$, holomorph nahe z_1 und $f_1(z) = \phi^{-1}(f(\phi(z)))$, so ist $\iota_f(z_0) = \iota_{f_1}(z_1)$.
♢ Für $z_0 = \infty$, also $f(z) = a_p z^p + \cdots + a_1 z + a_0 + a_{-1}/z + \cdots$, setzt man $f_1(z) = 1/f(1/z)$ und $\iota_f(\infty) = \iota_{f_1}(0)$.

Holomorphe Fixpunktformel *Für jede rationale Funktion R vom Grad $d > 1$ gilt*

$$\sum_{R(z)=z} \iota_R(z) = 1.$$

Beweisidee: Man betrachte im Fall $R(\infty) \neq \infty$ das Integral $\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} \left(\frac{1}{z - R(z)} - \frac{1}{z} \right) dz$, $r > 0$ hinreichend groß.

Folgerung *Es gibt mindestens einen Fixpunkt von R mit $|\lambda| > 1$ oder $\lambda = 1$. Somit folgt Satz 1 auch hieraus und Satz 6.*

Sei Σ eine endliche Gruppe von Möbiustransformationen mit der Eigenschaft: Zu jedem $\sigma \in \Sigma$ gibt es ein $\tau \in \Sigma$, so daß $R \circ \sigma = \tau \circ R$ gilt. Die Elemente von Σ heißen ***Symmetrien*** von R.

Satz 7 *$\sigma(\mathcal{J}) = \mathcal{J}$ und $\sigma(\mathcal{F}) = \mathcal{F}$ für alle $\sigma \in \Sigma$.*

Gilt Satz 7 auch dann, wenn Σ nicht endlich ist?

a. R gerade oder ungerade: $\Sigma = \{-\mathrm{id}, \mathrm{id}\}$.

b. $R(z) = z^p Q(z^m)$, $0 \le p < m$. $\Sigma = \Sigma_m = \{z \mapsto \omega z : \omega^m = 1\}$ ist die ***zyklische Gruppe*** der Ordnung m.

c. Nicht-analytische Symmetrien, Spiegelung an der reellen Achse, $z \mapsto \iota(z) = \bar{z}$: Σ könnte neben konformen auch ***antikonforme*** Abbildungen $\sigma \circ \iota$ enthalten. $\mathcal{J}$ und $\mathcal{F}$ sind symmetrisch zu $\mathbb{R}$, falls R ***reelle Koeffizienten*** hat ($R \circ \iota = \iota \circ R$), aber nicht nur dann, Bsp.: $R(z) = i(z + z^3)$. Hier ist $R^2(z) = -(z + z^3) + (z + z^3)^3$ reell!

d. Aufgabe Eine passende Funktion zu der Gruppe $\Sigma = \{\mathrm{id}, z \mapsto 1-z, z \mapsto 1/z, z \mapsto 1/(1-z), z \mapsto 1 - 1/z, z \mapsto z/(z-1)\}$ ist $R(z) = \dfrac{4(1 - z + z^2)^3}{27z^2(1-z)^2}$.

III Die Juliamenge

Für weitergehende Aussagen benötigt man das

Kriterium von Montel[2] *Seien $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein Gebiet und $a, b, c \in \widehat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden. Dann ist die Familie aller meromorphen Funktionen*

$$f : D \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}} \setminus \{a, b, c\}$$

normal *in D, dh. jede Folge derartiger Funktionen besitzt eine in D lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge (bzgl. der chordalen Metrik). Die Grenzfunktion ist entweder meromorph oder identisch ∞.*

Das Kriterium wird meist so angewandt:

- Ist $D \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ein ***invariantes*** Gebiet (dh. $R(D) \subset D$) mit mindestens ***drei*** Randpunkten, so ist $D \subset \mathcal{F}$.
- Ist D ein Gebiet mit $D \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$, so ist
$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} R^n(D) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus E(D) \text{ mit } \mathrm{card}\,(E(D)) \le 2.$$
- Ist $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ***kompakt***, mindestens ***dreipunktig*** und ***rückwärts invariant***, dh. $R^{-1}(E) \subset E$, so ist bereits $\mathcal{J} \subset E$: ***$\mathcal{J}$ ist die kleinste rückwärts invariante kompakte Menge mit mindestens drei Punkten.***

Bemerkung. Für $E(D) \neq \emptyset$ gibt es zwei Möglichkeiten:
a. $E(D) = \{a, b\}$: R ist konjugiert zu $z \mapsto z^{\pm d}$ mit $E(D) = \{0, \infty\}$ mittels $z \mapsto \frac{z-a}{z-b}$.
b. $E(D) = \{a\}$: R ist konjugiert zu einem Polynom mit $E(D) = \{\infty\}$ mittels $z \mapsto \frac{1}{z-a}$.

---

[2] Paul Montel (1876 -1975)

Die Menge $\mathcal{E} = \bigcup_D E(D)$ heißt ***Ausnahmemenge*** von R. Es gibt offenbar die Möglichkeiten

a. $\mathcal{E} = \{a, b\}$: R ist konjugiert zu $z \mapsto z^{\pm d}$ (Sonderfall).
b. $\mathcal{E} = \{a\}$: R ist konjugiert zu einem Polynom (wichtige Teilklasse).
c. $\mathcal{E} = \emptyset$ (Normalfall).

Man beachte: $\mathcal{E} \subset \mathcal{F}$, da $\mathcal{E}$ aus superattraktiven Fixpunkten oder 2-Zyklus besteht.

Oft benutzte Sätze aus der Funktionentheorie:

Satz von Vitali *Ist* (f_n) *normal im Gebiet* D *und gilt* $f_n \to f$ *(meromorph in* D*), punktweise in einer nicht-diskreten Teilmenge* $E \subset D$*, so gilt* $f_n \to f$ *lokal gleichmäßig in* D*.*

Satz von Hurwitz *Sind* f_n, $n \in \mathbb{N}$, *konforme Abbildungen von* D *und gilt* $f_n \to f$ *lokal gleichmäßig in* D*, so ist* f *selbst eine konforme Abbildung von* D, ***oder*** *konstant.*

Satz 1 $\mathcal{J}^\circ = \emptyset$ *oder* $\mathcal{J} = \widehat{\mathbb{C}}$.

Beispiel von Lattès[3] $R(z) = \dfrac{(z^2+1)^2}{4z(z^2-1)}$ *hat leere Fatoumenge,* $\mathcal{J} = \widehat{\mathbb{C}}$.

Satz 2 $\mathcal{J}$ *ist* ***perfekt****, dh.,* $\mathcal{J}$ *ist abgeschlossen und alle Punkte sind Häufungspunkte. Insbesondere ist* $\mathcal{J}$ *überabzählbar unendlich.*

Satz 3[4] *Für* $a \in \mathcal{J}$ *ist* $\mathcal{J} = \overline{\mathcal{O}^-(a)}$*, dh.* $\mathcal{J}$ *ist der Abschluß von* $\{z : R^n(z) = a \text{ für ein } n \in \mathbb{N}\}$.

Computerexperimente möglich für Grad-2-Funktionen.

Satz 4 (Julia's Definition) $\mathcal{J}$ *ist der Abschluß der Menge der abstoßenden periodischen Punkte.*

Bemerkung. Julia hat die (jetzt so genannte) Juliamenge ***so*** definiert. Wir können zur Zeit den Satz nur ohne das Adjektiv ***abstoßend*** beweisen,

$$\overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z : R^n(z) = z \text{ abstossend }\}} \subset \mathcal{J} \subset \overline{\bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{z : R^n(z) = z\}}.$$

Vollständiger Beweis in Teil C, wo gezeigt wird: Es gibt nur endlich viele nichtabstoßende Zykel.

Satz 5 (Selbstähnlichkeit) *Ist* D *ein Gebiet mit* $D \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$*, so gibt es ein* $N \in \mathbb{N}$ *mit* $R^n(D) \supset \mathcal{J}$*, dh.* $R^n(D \cap \mathcal{J}) = \mathcal{J}$*, für alle* $n \geq N$.

Computerexperiment. $R(z) = z^2 - 1$, Ausschnitt $|x - (1+\sqrt{5})/2| < 0.4 \cdot 2^{-k}, |y| < 0.3 \cdot 2^{-k}$, für $k = 1, 2, 4, 8, 16$. Abfrage ob $z_n \to \infty$ oder $z_n \to \{0, -1\}$: $|z_n| > 100$ oder $|z_n| < 0.01$ oder $|z_n + 1| < 0.01$, es genügt $n \leq 100$.

Satz 6 *Ist* D *ein Gebiet mit* $D \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$*, so ist* ***keine*** *Teilfolge von* (R^n) *normal in* D.

Bemerkung. Die ursprüngliche Definition lautet dagegen so: Wenigstens ***eine*** Teilfolge ist ***nicht*** normal.

Satz 7 $\mathcal{J}$ *ist genau dann zusammenhängend, wenn alle Komponenten von* $\mathcal{F}$ *einfach zusammenhängend sind.*

---

[3] Samuel Lattès (1873-1918)

[4] Weiterführend: Es gibt ein *Borel*-Maß μ mit Träger $\mathcal{J}$, so daß für jede Borel-Menge B und alle $a \in \mathcal{J}$ gilt: $\mu(B) = \lim_{n\to\infty} d^{-n} \sum_{R^n(z)=a} \delta_z(B)$, δ_z das *Dirac*-Maß, vgl. D.

Bemerkung. Ein Gebiet D heißt n***-fach zusammenhängend,*** wenn $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ aus genau n Zusammenhangskomponenten besteht.

Beispiel. Die Juliamenge von $P(z) = z^2 - 6$ ist eine ***Cantor***menge in $[-3, 3]$. R operiert auf den Punkten $z_i \in \mathcal{J}$ wie der Rechts-Shift auf dem Folgenraum der 01-Folgen $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$: $i = (i_1, i_2, i_3, \ldots) \mapsto (i_2, i_3, i_4, \ldots)$.

Satz 8 *$\mathcal{J}$ ist entweder zusammenhängend oder besteht aus überabzählbar vielen Zusammenhangskomponenten (so vielen wie es 01-Folgen gibt.)*

Satz 9 (Topologische Transitivität) *Es gibt (trivialerweise eine in $\mathcal{J}$ dichte Teilmenge von Punkten) $a \in \mathcal{J}$ mit dichter Bahn: $\overline{\mathcal{O}^+(a)} = \mathcal{J}$.*

Satz 10 (Aufgabe) Vertauschbare *rationale Funktionen haben dieselbe Julia- und Fatoumenge.*

IV Die Fatoumenge

Wieder beziehen sich alle Begriffe auf eine fest gewählte rationale Funktion R vom Grad $d > 1$. Die Zusammenhangskomponenten von $\mathcal{F}$ heißen ***stabile Gebiete*** oder ***Fatoukomponenten.*** Man beachte: $U = V$ oder eben $U \cap V = \emptyset$ für stabile Gebiete U, V.

Satz 1 *R bildet jedes stabile Gebiet* ***eigentlich*** *auf ein stabiles Gebiet ab.*

Wiederholung: *Eine holomorphe oder meromorphe Abbildung f eines Gebietes D auf ein Gebiet G heißt* ***eigentlich,*** *wenn f einen* ***(topologischen) Grad*** $\deg_D f = d$ *hat: jedes $w \in G$ hat unter f genau d Urbilder, mit Vielfachheit gezählt.*

Äquivalent sind:

♣ *$f^{-1}(K)$ ist kompakt für $K \subset G$ kompakt.*
♠ *$f(z) \to \partial G$ für $z \to \partial D$.*
♡ *$f(\partial D) \subset \partial G$, falls f auf ∂D noch stetig ist.*

Aufgabe. $f : D \longrightarrow G$ sei eigentlich vom Grad d, $G^* \subset G$ ein Gebiet und D^* eine Komponente von $f^{-1}(G^*)$. Dann ist $f : D^* \longrightarrow G^*$ eigentlich vom Grad $d^* \leq d$.

Satz 2 *Sei $\mathcal{U}$ rückwärts invariante Vereinigung von (endlich oder unendlich vielen) stabilen Gebieten ($R^{-1}(\mathcal{U}) \subset \mathcal{U}$). Dann ist $\mathcal{J} = \partial\mathcal{U}$.*

Satz 3 *Sei U ein vollständig invariantes stabiles Gebiet: $R^{-1}(U) = R(U) = U$ (hierzu genügt $R^{-1}(U) \subset U$). Dann ist $\mathcal{J} = \partial U$, und alle stabilen Gebiete $V \neq U$ sind einfach zusammenhängend.*

Folgerung *Für Polynome gilt: $\mathcal{J} = \partial\mathcal{A}_\infty$, und alle beschränkten stabilen Gebiete sind einfach zusammenhängend; dabei ist $\mathcal{A}_\infty = \{z : P^n(z) \to \infty\}$.*

Satz 4 *$\mathcal{F}$ ist entweder leer oder besteht aus ein, zwei oder ∞ vielen Gebieten. Es gibt höchstens zwei vollständig invariante Gebiete. Besteht $\mathcal{F}$ aus zwei Gebieten, so sind beide einfach zusammenhängend; sie werden von R fixiert oder vertauscht, sind also vollständig invariant unter R^2.*

Der Beweis benötigt die äußerst nützliche

Formel von Riemann Hurwitz *Sei $f: D \longrightarrow G$ eine eigentliche Abbildung vom Grad d mit r kritischen Punkten. Dann gilt, mit den Zusammenhangszahlen $m = \#D$ und $n = \#G$:*

$$(m-2) = d(n-2) + r.$$

Beispiele.
a. Ein ***Blaschkeprodukt*** $B : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ vom Grad d hat $d-1$ kritische Punkte in $\mathbb{D}$.
b. Eine rationale Funktion $R : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ mit $\#\widehat{\mathbb{C}} = 0$ hat $2d-2$ kritische Punkte.
c. Eine eigentliche Abbildung $f : \mathcal{A} \longrightarrow \mathcal{B}$ zweier Ringgebiete hat keine kritischen Punkte.
d. Für $m = n < \infty$, also z.B. $D = G$, gibt es nur folgende Möglichkeiten:

$$\begin{gathered} d=1, r=0, m=n \text{ beliebig;} \\ d \text{ beliebig, } r=0 \text{ und } m=n=2 \text{ (für } D=G \text{ nur } d=1); \\ d=r+1,\ m=n=1. \end{gathered}$$

Bemerkung. Die Zahl $\chi(D) = 2 - \#D$ heißt ***Euler-Charakteristik*** von D, sie hat eine geometrisch - topologisch - graphentheoretische Bedeutung: Ein ***Dreieck*** $\triangle$ ist der Abschluß eines einfach zusammenhängenden Gebietes mit drei ausgezeichneten Randpunkten, den ***Ecken*** und (abgeschlossenen) ***Kanten*** ($\subset \partial\triangle$) und einer ***Fläche.*** Eine ***Triangulierung*** des Gebietes D ist eine Überdeckung von $\overline{D}$ mittels endlich vieler Dreiecke; zwei Dreiecke sind dabei entweder disjunkt oder sie haben genau eine Ecke oder genau eine Kante gemeinsam. Es ist dann, unabhängig von der Triangulierung,

$$\chi(D) = E - K + F,$$

wobei E, K, F die Gesamtzahl der Ecken, Kanten und Flächen ist. Für $D = \widehat{\mathbb{C}}$ ergibt sich die Eulersche Polyederformel $\chi(\widehat{\mathbb{C}}) = 2$.

Eine Beweismöglichkeit für die Riemann-Hurwitz-Formel ist: Wähle Triangulierung von G, alle kritischen Werte treten dabei als Ecken auf. Jede Dreieckfläche, jede Kante und jede nicht-kritische Ecke hat dann d Urbilder, nicht aber die kritischen Ecken, sie haben weniger. Wie viele?
Es ist natürlich zu zeigen: $\#D = 2 - \chi(D)$ ***und*** die ***Unabhängigkeit*** der Definition von $\chi(D)$ von der gewählten Triangulierung.

B. Die lokale Theorie

Diskutiert wird die unterschiedliche Dynamik von (R^n) in Umgebungen der Fixpunkte oder periodischen Punkte von R.

I Anziehende (oder attraktive) Fixpunkte

Globale Voraussetzung:

(R) $$R(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots \text{ bei } z = 0,\ 0 < |\lambda| < 1$$

ist rational (oder nur holomorph in $|z| < r$).

Satz 1 *Lokal, dh. in $|z| < \rho \le r$, besitzt die **Schröder[5]sche Funktionalgleichung***

(SFG) $$\Phi(R(z)) = \lambda \Phi(z)$$

*genau eine durch $\Phi(0) = 0, \Phi'(0) = 1$ normierte Lösung. Φ heißt auch **Kœnigs[6]funktion.***

Beweisideen.

[5]Ernst Schröder (1841-1902)
[6]Gabriel Kœnigs (1858-1931)

1. dynamisch. Betrachte $\Phi_n(z) = R^n(z)/\lambda^n$. Falls $\Phi_n \to \Phi$, so ist Φ Lösung wegen $\Phi_{n+1}(z) = \Phi_n(R(z))/\lambda$. Man zeigt dann $\Phi_n \to \Phi$.
Eindeutigkeit: Ψ sei Lösung, damit $\Psi(z) = (\Psi(R^n(z))/R^n(z)) \cdot R^n(z)/\lambda^n \to \Psi'(0) \cdot \Phi(z)$, weil $\Psi(z_n)/z_n \to \Psi'(0)$ für $z_n \to 0$.

2. Potenzreihenansatz für die ***inverse*** Gleichung von ***Poincaré***[7]

$$R(\Psi(z)) = \Psi(\lambda z) \quad (|\lambda| \neq 0, 1).$$

Konvergenzbeweis mittels ***Cauchyscher Majorantenmethode.*** Die lokale Inverse der lokalen Lösung löst dann (SFG).

Der ***Ansatz*** funktioniert auch für $|\lambda| = 1, \lambda^m \neq 1$, was nicht immer funktioniert ist der Konvergenzbeweis. Beim Auflösen treten ***kleine Nenner*** $\lambda^n - 1$ auf; vgl. B.IV

Satz 2 *Sei R rational, durch (R) gegeben, und U das stabile Gebiet, das* 0 *enthält* ***(Schrödergebiet, attracting basin).*** *Dann gilt:*

- ***a.*** *Die Schrödersche Funktionalgleichung besitzt eine globale, dh. in U holomorphe, durch $\Phi(0) = 0, \Phi'(0) = 1$ eindeutig bestimmte Lösung $\Phi(z) = \lim_{n\to\infty} R^n(z)/\lambda^n$.*
- ***b.*** $\Phi(U) = \mathbb{C}$.
- ***c.*** *U enthält einen kritischen Punkt c von R, es gilt $R^n(c) \neq 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$.*
- ***d.*** *$\#U = 1$ oder $\#U = \infty$, und $\#U = 1$ sicher dann, wenn U nur einen, evtl. mehrfachen, kritischen Punkt enthält.*

Wesentlich für den Beweis:
Es gibt eine größte Kreisscheibe $\Delta : |w| < \rho$, in der $\Psi = \Phi^{-1}$, $\Psi(0) = 0$, existiert. Φ bildet das ***Schlichtheitsgebiet*** *$D = \Psi(\Delta)$ konform auf Δ ab, auf ∂D liegt ein kritischer Punkt von R.*

Satz 2 gilt analog für beliebige attraktive Fixpunkte anstelle 0 und für attraktive ***Zykel***, es ist R^p anstelle R zu betrachten. In jedem der Attraktionsgebiete U_j, $1 \leq j \leq p$, liegt ein kritischer Punkt von R^p, dh., in ***wenigstens einem U_j liegt ein kritischer Punkt von R selbst.***

Die Anzahl der Schröder-Zykel ist $\leq 2d - 2$.

Abstoßende Fixpunkte
sind eng verwandt. Auch hier ist (SFG) eindeutig lokal lösbar. Interessanter ist die ***inverse*** Gleichung

$$R(\Psi(z)) = \Psi(\lambda z), \ (|\lambda| > 1).$$

Ihre Lösung läßt sich durch $\Psi(z) = R(\Psi(z/\lambda))$ sukzessive von $|z| < r$ nach $|z| < |\lambda| r$, $|z| < |\lambda|^2 r, \ldots |z| < |\lambda|^n r$ fortsetzen, also *nach ganz $\mathbb{C}$ als meromorphe Funktion* ***(Poincaréfunktion).***

Beispiel 1 $R(z) = z^2$, Fixpunkt $z_0 = 1$ mit $\lambda = 2$. Poincaréfunktion $\Psi(z) = e^z = 1 + z + \frac{z^2}{2} + \cdots$.

Beispiel 2 Die Verdopplungsformel des ***Tangens*** lautet $\tan 2z = \dfrac{2\tan z}{1 - \tan^2 z}$, also $\Psi(z) = \tan z, R(z) = \dfrac{2z}{1 - z^2}, z_0 = 0, \lambda = 2$.

Spiraliges Aussehen der Juliamenge: $R(z) = \lambda z + \cdots$, $|\lambda| > 1$, $\arg \lambda = 2\pi\alpha$, α irrational. Für $z \neq 0$ nahe 0 ist $R^n(z) \sim \lambda^n z, n \leq N$, diese Punkte liegen näherungsweise auf der Spirale $t \mapsto z\lambda^t, t \in \mathbb{R}$, erst recht die Punkte mit $n < 0$.

Computerexperiment: $P(z) = az^2 + (1-a)z^3$, $a \neq 0$ so daß $P'(1) = \lambda = 1.05 e^{i\pi\sqrt{5}}$ z.B. (beachte $P(1) = 1$). Abfrage ob $z_n \to 0$ bzw. ∞: $|z_n| \leq 0.01$ bzw. $|z_n| \geq 100$. Ausschnitt $|x - 1| \leq 0.4 \cdot 10^{-k}, |y| \leq 0.3 \cdot 10^{-k}$, nacheinander $k = 1, 2, 4, 8, 16$.

---

[7] Henri Poincaré (1854-1912)

Aufgabe. Sei $U = R(U)$ ein einfach zusammenhängendes stabiles Fixgebiet und $\phi : U \longrightarrow \mathbb{D}$ eine Riemann-Abbildung. Man zeige: $B = \phi \circ R \circ \phi^{-1}$ ist ein ***Blaschkeprodukt*** vom Grad $\deg_U R$.

II Superattraktive Fixpunkte

werden durch Konjugation wahlweise nach $z = 0$

(0) $$R(z) = az^m(1 + a_1 z + \cdots) \quad (a \neq 0, m \geq 2)$$

oder $z = \infty$ verlegt,

(∞) $$R(z) = az^m(1 + a_1/z + \cdots) \quad (a \neq 0, m \geq 2).$$

Satz 1 *Für* (0) *besitzt die* ***Funktionalgleichung von Böttcher***[8]

(BFG) $$\Phi(R(z)) = a\Phi(z)^m$$

lokal, dh. in $|z| < \rho \leq r$, *genau eine durch* $\Phi(0) = 0, \Phi'(0) = 1$ *normierte Lösung.*

Bemerkung. Im Fall (∞) nimmt man die Normierung $\Phi(z) = z + c_0 + c_1/z + \cdots$ bei ∞ vor.

Beweisidee. Falls Φ Lösung ist ergibt Iteration (oBdA $a = 1$, und Gl. (0))

$$\Phi(z) = \sqrt[m^n]{\Phi(R^n(z))/R^n(z)} \cdot \Phi_n(z)$$

mit

$$\Phi_n(z) = z \sqrt[m^n]{R^n(z)/z^{m^n}}, \quad \sqrt[m^n]{1} = 1.$$

Hieraus folgt die Eindeutigkeit $\Phi(z) = \Phi'(0) \cdot \lim_{n\to\infty} \Phi_n(z)$.

Der Existenzbeweis besteht darin, die lokal gleichmäßige Konvergenz von (Φ_n) nachzuweisen; aus $\Phi_{n+1}(z)^m = \Phi_n(R(z))$ folgt dann (BFG).

Der lokale Satz hat nicht immer eine globale Entsprechung: In jedem Fall gilt

Satz 2 *Sei* R *rational, durch* (0) *gegeben, und* U *das stabile Gebiet, das* 0 *enthält* ***(Böttchergebiet, super-attracting basin).*** *Dann gilt:*

- ***a.*** U *enthält einen kritischen Punkt von* R, *nämlich* $z = 0$.
- ***b.*** $\#U = 1$ *oder* $\#U = \infty$, *und sicher* $\#U = 1$, *wenn* U *neben* $z = 0$ *kein weiteren kritischen Punkt enthält.*
- ***c.*** *Besitzt* Φ *eine analytische Fortsetzung nach ganz* U, *so ist* Φ *eine konforme Abbildung auf* $\{|w| < |a|^{-1/(m-1)}\}$. *Dies gilt genau dann, wenn* U *neben* $z = 0$ *kein weiteren kritischen Punkt enthält.*

Beispiel. $R(z) = z^2 - z^3$, Fixpunkt $z = 0$. $U = U_0$ ist einfach zusammenhängend (warum?), aber Φ existiert nicht in U_0 weil der kritische Punkt $2/3 \in U_0$ ist.

Die ***Greensche Funktion*** eine Gebietes D mit Pol in $z = z_0$ ist folgendermaßen definiert:

(i) G ist harmonisch in $D \setminus \{z_0\}$.
(ii) G hat (stetige) Randwerte 0.
(iii) $u(z) = G(z) + \log|z - z_0|$ ist in $z = z_0$ hebbar, dh., u ist harmonisch in D.

Für $z_0 = \infty$ ist $z - z_0$ durch $1/z$ zu ersetzen. Die Greensche Funktion ist eindeutig bestimmt, existiert aber nicht immer.

Beispiel: $D \neq \mathbb{C}$ sei einfach zusammenhängend, $F : D \longrightarrow \mathbb{D}$ eine ***Riemann***-Abbildung mit $F(z_0) = 0$. Dann ist $G(z) = -\log|F(z)|$ die Greensche Funktion von D mit Pol in z_0. Umgekehrt: Hat die Greensche Funktion die Form $G(z) = -\log|\Phi(z)|$ mit einer in D holomorphen Funktion

[8] Lucjan Emil Böttcher (1872-?)

Φ, so ist D einfach zusammenhängend und Φ Riemann-Abbildung.

Satz 3 *Sei R rational, durch* (0) *gegeben, und U das stabile Gebiet, das* 0 *enthält. Ist* $\deg R|_U = m$, *so ist die Greensche Funktion mit Pol in $z = 0$ gegeben durch*

$$G(z) = -\lim_{n\to\infty} m^{-n} \log|R^n(z)| + \frac{1}{m-1}\log|a|.$$

Es gilt $G(R(z)) = mG(z)$.

Für Polynome (der Einfachheit halber nur für normierte) werden Satz 3 und Teile von Satz 2 noch einmal formuliert.

Satz 4 *Sei $P(z) = a_0 + \cdots + z^d$ ein (normiertes) Polynom. Dann gelten:*

- ***a.*** *$G(z) = \lim_{n\to\infty} d^{-n}\log|P^n(z)|$ ist die Greensche Funktion des Attraktionsgebietes $\mathcal{A}_\infty$ mit Pol in ∞. Es gilt $G(P(z)) = dG(z)$.*
- ***b.*** *$\mathcal{A}_\infty$ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $P'(z) \neq 0$ in $\mathcal{A}_\infty$, dh. wenn $\mathcal{O}^+(\mathcal{C})$ beschränkt ist. Die Böttcherfunktion Φ bildet dann $\mathcal{A}_\infty$ konform auf $\triangle = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ ab.*

Die Sätze 2 und 3 gelten analog für super-attraktive ***Zykel***, es ist R^p anstelle R zu betrachten. Dies wird nicht noch einmal formuliert.

Die Zahl der Böttcher-Zykel ist $\leq 2d - 2$ (= Gesamtzahl der kritischen Punkte).

III Rational indifferente (oder neutrale) Fixpunkte

$$R(z) = z - az^{m+1} + \cdots, \quad a \neq 0, m \geq 1$$

ist die ***Normalform*** der betrachteten rationalen (oder nur in $|z| < r$ holomorphen) Funktion; der Fixpunkt 0 hat Multiplikator $\lambda = 1$. Einheitswurzeln als Multiplikatoren werden später behandelt. Klar ist nur, daß der Fixpunkt 0 zur Juliamenge gehört, nicht klar ist, ob er Punkte aus der Fatoumenge ***anzieht.***

Zwei Begriffspaare:
♣ $v \in \mathbb{C}, |v| = 1$, heißt ***anziehende Richtung*** für R, wenn $av^m > 0$ ist, und ***abstoßende Richtung*** falls $av^m < 0$. Es gibt abwechselnd je m regulär verteilte derartige Richtungen.
♠ Ein einfach zusammenhängendes Gebiet P mit $0 \in \partial P$ heißt ***anziehendes*** oder ***invariantes Petal,*** wenn $R(\overline{P}) \subset P \cup \{0\}$, und ***abstoßendes Petal*** falls $\overline{P} \subset R(P) \cup \{0\}$. Abstoßende Petale erhält man so: R besitzt eine lokale Umkehrfunktion $R^{-1}(z) = z + az^{m+1} + \cdots$. Ein invariantes Petal dafür (hinreichend klein) ist ein abstoßendes für R.

Aufgabe. *Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ sind die Sektoren $|z| < \epsilon$, $|\arg(\overline{v}z)| < \pi/(3m)$ anziehende bzw. abstoßende Petale, je nachdem v anziehende oder abstoßende Richtung ist.*
Julia's Konstruktion. Gesucht werden zunächst invariante Kreisscheiben$\Delta_b : |z-b| < |b|$, wobei

$$R(z) = z - z^2 + O(|z|^3)$$

holomorph in $|z| < r, |\arg z| < \pi$, ist. Man findet $R(\overline{\Delta}_b) \subset \Delta_b \cup \{0\}$, falls $|b - \epsilon| \leq \epsilon$ für ein $\epsilon > 0$. Dann ist auch $P = \bigcup_b \Delta_b$ ein invariantes Petal, seine Randkurve, die ***Einhüllende*** der Kreise $|z - b| = |b|$ für $|b - \epsilon| = \epsilon$ ist in Polarkoordinaten gegeben durch

$$r = 4\epsilon\cos^2(\theta/2) = 2\epsilon(1 + \cos\theta),$$

dh., P ist das Bild der Kreisscheibe $|u - 1| < 1$ unter der Abbildung $z = \epsilon u^2$; es ist $P = \{z : |\sqrt{z} - \sqrt{\epsilon}| < \sqrt{\epsilon}\}$ eine ***Kardioide.***

Wichtig für ***Computerexperimente.*** Abfrage ob $z_n \to 0$: $|z_n|^2 \le 2\epsilon(|z_n| + \mathrm{Re}\, z_n)$.

Die ***Konstruktion von Fatou*** geht von der Normalform $R(z) = z + 1 + O(|z|^{-1})$ mit Fixpunkt ∞ aus; dabei ist R holomorph in $|z| > r$, $|\arg z| < \pi$. Gesucht wird $\varrho : (-\infty, x_0] \longrightarrow [0, \infty)$, so daß $P = \{z : |y| > \varrho(x)\}$ invariant ist.
Geometrische Idee: Die Strecke von $z = x + iy$, etwa $y > 0$, nach $w = u + iv = R(z)$ hat die Steigung $s(x, y) = \frac{v-y}{u-x}$; P ist invariant wenn ϱ konkav ($\varrho'' < 0$) und $\rho'(x) \le s(x, y)$ für alle $y \ge \varrho(x)$ ist. Das Ergebnis ist eine nach links geöffnete Parabel $\rho(x) = \sqrt{2x_0(x_0 - x)}$.

Satz 1 *Lokal, dh. im Petal P besitzt die* ***Abelsche Funktionalgleichung***

(AFG) $$\Phi(R(z)) = \Phi(z) + 1$$

bei gegebenem $R(z) = z + 1 + \frac{c}{z} + O(|z|^{-1-\epsilon})$ für ein $\epsilon > 0$ eine Lösung mit der Asymptotik

$$\Phi(z) = z - c \log z + O(1),$$

für $z \to \infty$ in $\mathrm{Re}\, z > 0$. Dadurch ist Φ' eindeutig bestimmt, d.h., Φ bis auf eine additive Konstante.

Beweisidee. Man schreibt

$$R^n(z) = z + n + \sum_{\nu=1}^{n-1} \frac{c}{\nu + z} + \psi_n(z),$$

und zeigt in $P \cap \{\mathrm{Re}\, z > \gamma\}$: die Folge (ψ_n) konvergiert gleichmäßig und ist gleichmäßig beschränkt. Die Folge $(R^n - n - c \log n)_{n \in \mathbb{N}}$ konvergiert damit gegen Φ, eine Lösung mit der angegebenen Asymptotik.

Bemerkung. $R(z) = z - z^2 + cz^3 + \cdots$ bei Julia ist konjugiert zu $R_1(z) = 1/R(1/z) = z + 1 + (1 - c)/z + \cdots$; ist $\Phi_1(R_1(z)) = \Phi_1(z) + 1$, so löst $\Phi(z) = \Phi_1(1/z)$ mit der entsprechenden Asymptotik die Gleichung $\Phi(R(z)) = \Phi(z) + 1$.

Satz 2 *Sei $R(z) = z - z^2 + cz^3 + \cdots$ rational. Dann gibt es ein und nur ein stabiles Fixgebiet U (**Leau**[9]**gebiet** oder **parabolic basin**) mit $R^n \to 0$ in U, und es gilt:*

- ***a.*** *U enthält ein invariantes Petal um die anziehende Richtung $v = 1$ mit der Winkelöffnung 2π*
- ***b.*** *Die Abelsche Funktionalgleichung besitzt eine globale, dh. in U holomorphe, durch die Asymptotik*

$$\Phi(z) = \frac{1}{z} + (1 - c) \log z + O(1), \;\; z \to 0 \text{ in } |z - \epsilon| < \epsilon,$$

modulo eine additive Konstante eindeutig bestimmte Lösung.

- ***c.*** $\Phi(U) = \mathbb{C}$.
- ***d.*** *Es gilt $\arg R^n(z) \to 0$ für $n \to \infty$.*
- ***e.*** *U enthält einen kritischen Punkt von R.*
- ***f.*** *$\#U = 1$ oder $\#U = \infty$, und sicher $\#U = 1$ wenn U nur einen (evtl. mehrfachen) kritischen Punkt enthält.*

Beweisidee. Die Fortsetzung von Φ aus einem Petal heraus nach U geschieht mittels der Funktionalgleichung wie im attraktiven Fall. Genauso wie dort wird die letzte Behauptung bewiesen. Daß es nur ein U gibt liegt im Wesentlichen daran, daß das anziehende und das abstoßende Petal zusammen eine Umgebung von 0 ergeben, und daß der Fixpunkt in abstoßenden Petalen tatsächlich abstößt.

Nächster Schritt ist die Übertragung auf den allgemeinen Fall:

Satz 3 *Sei $R(z) = z - az^{m+1} + \cdots$, $a \neq 0$, $m \ge 2$, rational. Dann gibt es genau m stabile Fixgebiete U_μ (**Leaugebiet** oder **parabolic basin**) mit $R^n \to 0$ in U_μ, und es gilt:*

---

[9]Leopold Leau (1868-1940?)

- U_μ *enthält ein invariantes Petal um die anziehende Richtung* v_μ *mit der Winkelöffnung* $2\pi/m$.
- *Die Abelsche Funktionalgleichung besitzt eine globale, dh. in* U_μ *holomorphe, durch die Asymptotik*

$$\Phi_\mu(z) = \sum_{j=1}^{m} \frac{c_j}{z^j} + A\log z + O(1)$$

modulo eine additive Konstante eindeutig bestimmte Lösung.
- $\Phi(U_\mu) = \mathbb{C}$.
- *Es gilt* $\arg(\overline{v}_\mu R^n(z)) \to 0$ *für* $n \to \infty$, *wobei* v_μ *anziehende Richtung ist.*
- U_μ *enthält einen kritischen Punkt von* R.
- $\#U_\mu = 1$ *oder* $\#U_\mu = \infty$, *und sicher* $\#U_\mu = 1$, *wenn* U_μ *nur einen (evtl. mehrfachen) kritischen Punkt von* R *enthält.*

Bemerkung. Die Gebiete U_μ heißen ***Blütenblätter,*** zusammen bilden sie die ***Leau-Blume*** $\mathcal{L}$ mit Zentrum 0. ***Offen:*** Ist es möglich, daß $\#U_\mu = 1$ und $\#U_\nu = \infty$?

Beweisidee. Die Schwierigkeit besteht in der Konstruktion invarianter Petale. Für $R(z) = z - \frac{1}{m}z^{m+1} + bz^{2m+1} + \cdots$ geht man so vor: Sei v anziehende Richtung und S der Sektor $|\arg(\overline{v}z)| < \pi/m$. S wird durch $z \mapsto w = z^m$ konform auf $|\arg w| < \pi$ abgebildet, die Umkehrfunktion mit $w \mapsto z = w^{1/m}$ bezeichnet. Man erhält $F(w) = R(w^{1/m})^m = w - w^2 + cw^{2+1/m} + \cdots$, eine Potenzreihe in $w^{1/m}$, holomorph in $|w| < r, |\arg w| < \pi$. Dafür sind aus der Konstruktion von Julia gute Petale bekannt. Dies ergibt dann ein invariantes Petal P_v für R als Bild von $|u-1| < 1$ unter der Abbildung $u \mapsto \epsilon v u^{2/m}$. Damit ist die Hauptarbeit getan, der Rest verläuft wie im Beweis von Satz 2.

Es bleibt aber noch $R(z) = z - az^{m+1} + \cdots, a \neq 0$, zu untersuchen. Hier hilft:

Es gibt ein Polynom $Q(z) = \alpha z + \cdots$, $\alpha \neq 0$, *so daß die durch* ***lokale Konjugation*** $R \circ Q = Q \circ F$ *gewonnene Funktion* F *(sie ist i.a. nicht mehr rational) die Entwicklung* $F(z) = z - \frac{1}{m}z^{m+1} + cz^{2m+1} + \cdots$ *hat.*

Das lokale Bild für F, dh. die anziehenden und abstoßenden Petale von F werden durch $Q(z) = \alpha z + \cdots$ auf Petale in einer Umgebung von 0 in der dynamischen Ebene für R abgebildet. Insbesondere heißt das: Es gibt m invariante (abstoßende) Petale P_v, je eines zu jeder anziehenden (abstoßenden) Richtung v: Das Bild der Kreisscheibe $|u-1| < 1$ unter der Abbildung $u \mapsto Q(\epsilon v u^{2/m})$. Sobald dies getan ist verläuft alles wie vorher.

Computergraphik. Als Abfrage für $z_n \to 0$ bei m Blättern bietet sich an: $|z_n^{m/2} - \epsilon| < \epsilon$ für das erste $n \leq N =$ maximale Iterationszahl (die muß hier höher angesetzt werden als im (super)-attraktiven Fall); $\epsilon > 0$ ist durch Probieren zu finden.

Es bleiben noch zwei Fälle:

a. $R(z) = \lambda z + \cdots, \lambda$ eine primitive q-te Einheitswurzel. Dann ist $R^q(z) = z - az^{kq+1} + \cdots$, $k \in \mathbb{N}$, dh., *es gibt* kq *Blütenblätter, sie werden von* R *zyklisch vertauscht. Wenigstens eines enthält einen kritischen Punkt von* R.

Der Grund ist folgender: R^q hat eine gewisse Zahl m von Blütenblättern um 0, während R eine anziehende Richtung v von R^q auf λv abbildet, und so die U_μ zyklisch vertauscht. ***Beispiel*** $iz + z^2$ als ***Übungsaufgabe.***

b. α ist ein p-Zyklus von R, der Multiplikator λ ist eine primitive q-te Einheitswurzel. Dann hat R^s, mit $s = \text{kgV}\,(p,q)$, die Fixpunkte $z_j \in \alpha$ mit Multiplikator 1. *Jeder ist Zentrum einer*

Leaublume $\mathcal{L}_j$, die aus m Blütenblättern U_μ^j besteht. R bildet $\mathcal{L}_j$ auf $\mathcal{L}_{j+1}$ ab. Wenigstens eines der U_j^μ enthält einen kritischen Punkt von R.

Die Zahl der Leau-Zykel (für beliebige Multiplikatoren λ=Einheitswurzel) *ist* $\leq 2d-2$.

Die Konstruktion einer ***Abelfunktion*** (etwa zum Fixpunkt $z=0$) läßt sich auch in abstoßenden Petalen durchführen: Gelöst wird $\Phi(R^{-1}(z)) = \Phi(z)+1$ in einem abstoßenden Petal, das Bild überdeckt einen Winkel $W : |\arg(z-x_0)| < \sigma$. Dort existiert auch die Umkehrfunktion Ψ, sie erfüllt

$$R(\Psi(z)) = \Psi(z-1) \quad \text{in } W.$$

Dadurch, dh. durch $\Psi(z) = R(\Psi(z+1))$ läßt sie sich sukzessive nach $W-1, W-2, \ldots$, also nach ganz $\mathbb{C} = \bigcup_{n\in\mathbb{N}}(W-n)$ fortsetzen; in Analogie zum Fall eines abstoßenden Fixpunktes nennt man auch hier Ψ eine ***Poincaréfunktion.***

IV Rotationsgebiete

sind stabile Gebiete U, in denen R wie eine Rotation einer Kreisscheibe oder eines Kreisrings wirkt. Behandelt werden hier zwei Arten, ***Siegelscheiben*** und ***Arnold-Herman-Ringe.*** Die ersteren enthalten einen irrational neutralen Fixpunkt (das ***Zentrum***, hier $z=0$):

$$R(z) = \lambda z + \cdots, \ \lambda = e^{2\pi i\alpha}, \ \alpha \text{ irrational},$$

die letzteren sind Ringgebiete (2-fach zusammenhängend).

Wann ist $z = 0 \in \mathcal{F}$, dh., $z=0$ ***Zentrum einer Siegelscheibe***?

Satz 1 *Genau dann ist* $0 \in \mathcal{F}$, *wenn die Schrödersche Funktionalgleichung*

$$\Phi(R(z)) = \lambda\Phi(z)$$

bei $z=0$ *eine Lösung* $\Phi(z) = z + \cdots$ *besitzt.*

Der erste, der die Lösbarkeit bewies, war ***Siegel***[10]. Er zeigte dies unter der zahlentheoretischen Voraussetzung

$$\log|\lambda^n - 1| \geq -K\log n$$

für ein $K>0$ und alle $n \in \mathbb{N}$, vgl. die Bemerkung über ***kleine Nenner*** in B.I.

Fast alle irrational indifferenten Multiplikatoren führen zu Siegelscheiben: *Für festes* $\epsilon \geq 0$ *sei* $\mathcal{D}(\epsilon)$ *die Menge der reellen Zahlen* $t \in (0,1)$ *mit* $|t-p/q| \geq \delta/q^{2+\epsilon}$ *für alle* $p\in\mathbb{Z}, q\in\mathbb{N}$ *und ein* $\delta>0$ ***(diophantische Bedingung).*** *Es gilt:* $\mathcal{D}(\epsilon)$ *hat Lebesgue-Maß* 1 *für* $\epsilon>0$ *und Maß* 0 *für* $\epsilon=0$.

Eine systematische Untersuchung erfordert einen

Steilkurs über Kettenbrüche [continued fractions]. Sei (a_n) eine Folge in $\mathbb{N}$. Wir setzen $m_k(x) = \dfrac{1}{a_k+x}$ und $[a_1,a_2,\ldots,a_n] = m_1\circ m_2\circ\cdots\circ m_n(0)$: dies ist ein ***endlicher Kettenbruch,*** zB. ist

$$[a_1,a_2,a_3] = \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3}}}, \ [a_1,a_2,a_3,a_4] = \frac{1}{a_1+\frac{1}{a_2+\frac{1}{a_3+\frac{1}{a_4}}}}.$$

Es gilt $[a_1,a_2,\ldots,a_n] = p_{n+1}/q_{n+1}$ mit

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= a_n p_n + p_{n-1}, \quad p_0 = 1, \quad p_1 = 0 \\ q_{n+1} &= a_n q_n + q_{n-1}, \quad q_0 = 0, \quad q_1 = 1 \end{aligned}$$

[10] Carl Ludwig Siegel (1896-1981)

sowie

a. *$t = \lim_{n\to\infty}[a_1, a_2, a_3, \ldots, a_n] =: [a_1, a_2, a_3, \ldots]$ existiert, $t \in (0,1)$ irrational.*

b. *Jedes irrationale $t \in (0,1)$ besitzt eine eindeutig bestimmte **Kettenbruchentwicklung** $t = [a_1, a_2, a_3, \ldots]$.*

c. *Es gilt die **Fehlerabschätzung***

$$\frac{1}{q_{n+1}(q_{n+1}+q_{n+2})} < |t - [a_1, \ldots, a_n]| < \frac{1}{q_{n+1}q_{n+2}}.$$

$t - [a_1, \ldots, a_n]$ ist abwechselnd positiv bzw. negativ.

d. *Für beliebiges $t \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$: $t = \pm(a_0 + [a_1, a_2, a_3, \ldots])$, und für $t \in \mathbb{Q}$: $t = \pm(a_0 + [a_1, a_2, a_3, \ldots, a_m])$* (endlich).

Bemerkungen.

1. Man erhält die Kettenbruchentwicklung von $t \in [0,1] \setminus \mathbb{Q}$ so: $a_1 := int(1/t)$ (ganzzahliger Anteil), $t_1 := frac(1/t) = 1/t - a_1$ (gebrochener Anteil), $a_2 := int(1/t_1)$, $t_2 = frac(1/t_1)$ etc.
2. Die ***schließlich periodischen*** Kettenbrüche ($(a_n)_{n\ge m}$ periodisch) stellen ***quadratische algebraische*** Zahlen dar, dh. Lösungen ganzzahliger Gleichungen $c_0 + c_1\xi + c_2\xi^2 = 0$, und umgekehrt. zB. gilt für $t = [1,1,1,\ldots]$: $t = \frac{1}{1+t}$, also $t^2 + t - 1 = 0$, $t = (\sqrt{5} - 1)/2$.
3. Allgemein genügen (irrationale) ***algebraische*** Zahlen ξ (Lösungen ganzzahliger Gleichungen $c_0 + c_1\xi + \cdots + c_n\xi^n = 0$) einer ***diophantischen Bedingung*** $|\xi - p/q| \ge \delta/q^\kappa$ ($\kappa = n$ nach Liouville, $\kappa > 2$ beliebig nach Roth).
4. $R(z) = e^{i\pi\sqrt{p}} + z^2 + \cdots$, p eine Primzahl (insbesondere $p = 5$), ist geeignet für ***Computergraphiken.***

Rüssmann (1967) bzw. ***Brjuno (1971)*** haben den Satz von Siegel unter einer schwächeren Bedingung bewiesen.

Satz 2 *Gilt*

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\log q_{n+1}}{q_n} < \infty,$$

*so besitzt R eine **Siegelscheibe** um $z = 0$.*

Yoccoz[11] ***(1988)*** hat u.a. ergänzt: Für $P(z) = \lambda z + z^2$ ist die Bedingung des Satzes auch ***notwendig!*** Wenn also $P(z) = \lambda z + z^2$ eine Siegelscheibe um 0 besitzt, so gilt das für ***jede*** rationale Funktion $R(z) = \lambda z + \cdots$

Unabhängig von diesen Bedingungen (unspezifiziert) kann man zeigen:

Satz 3 (Yoccoz 1985) *Für Lebesgue-fast alle $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ hat $\lambda z + z^2$ eine Siegelscheibe S_λ mit Zentrum 0. Zusätzlich gilt:*
(i) *Für Lebesgue-fast alle $\lambda \in \partial\mathbb{D}$ ist $-\lambda/2 \in \partial S_\lambda$.*
(ii) (2004) *Es gibt eine dichte Menge von λ's mit $\mathcal{C}^\infty$-Rand ∂S_λ*

Viel früher als Siegel, bevor überhaupt bekannt war, daß es jetzt so genannte Siegelscheiben gibt, hat ***Cremer*** gezeigt, daß es irrational indifferente Fixpunkte gibt, die nicht Zentrum sind. Solche Punkte heißen ***Cremer-Punkte,*** entsprechend spricht man von einem ***Cremer-Zykel.***

Satz 4 (Cremer[12]***)*** *Für eine in $\partial\mathbb{D}$ dichte Menge von Multiplikatoren λ ist $z = 0$ Cremer-Punkt von $R(z) = \lambda z + \cdots$, $\deg R = d$.*

[11] Fieldsmedaille 1994
[12] Hubert Cremer (1897-1983)

Satz 5 *Jeder Cremerpunkt und jeder Randpunkt einer Siegelscheibe ist Häufungspunkt der kritischen Bahn* $\mathcal{O}^+(\mathcal{C})$.

Computerexperiment. Für $R(z) = e^{2\pi i\alpha}z + z^2 = \lambda z + z^2$ wird der kritische Punkt $z = -\lambda/2$ vorwärtsiteriert (10-50000 mal); α wird zufällig gewählt. "Fast immer" erscheint dabei der Rand eines Gebietes, vermutlich einer Siegelscheibe.

Man benutzt zum Beweis von Satz 5 den auch sonst nützlichen

Satz 6 (Normalität von Umkehrfunktionen) *Sei D ein Gebiet mit $D \cap \mathcal{J} \neq \emptyset$, und (ψ_k) eine Folge von in D analytischen Umkehrfunktionen, $R^{n_k} \circ \psi_k =$* id. *Dann ist (ψ_k) normal und alle Grenzfunktionen sind Konstanten in $\mathcal{J}$. Für $\infty \notin \mathcal{J}$ gilt noch $\psi_k' \to 0$.*

Bei ***Arnol'd-Herman-Ringen*** fassen wir uns kurz, abgesehen von der Zusammenhangszahl unterscheiden sie sich kaum von Siegelscheiben:

Satz 7 *Sei U ein Arnol'd-Herman-Ring. Dann gilt:*

- ***a.*** *Die **Schrödersche Funktionalgleichung** $\Phi(R(z)) = e^{i\theta}\Phi(z)$ besitzt eine Lösung in U, eindeutig bestimmt bis auf einen multiplikativen Faktor $\neq 0$.*
- ***b.*** *Φ bildet U konform auf einen Kreisring $\mathcal{A} = \{r_1 < |w| < r_2\}$ ab.*
- ***c.*** *∂U ist enthalten in $\overline{\mathcal{O}^+(\mathcal{C})}$.*

Bemerkung. Einen wesentlichen Unterschied gibt es aber doch: Die ***Rotationszahl*** θ bzw. $e^{i\theta}$ läßt sich nicht direkt an R ablesen, man hat auch keinen Anhaltspunkt, wo U zu suchen ist, außer in einem Fall:

$$R(z) = ze^{i\alpha}\prod_{\nu=1}^{2n}\frac{z-a_\nu}{1-\overline{a_\nu}z}, \ |a_\nu| < 1 < |a_{n+\nu}|, \ \nu = 1, \ldots, n.$$

Satz (Herman 1979) *Sind die $|a_\nu|$ hinreichend klein und die $|a_{n+\nu}|$ hinreichend groß , $1 \leq \nu \leq n$,* (so daß $R : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \partial\mathbb{D}$ ein orientierungserhaltender Diffeomorphismus ist) *und wird α richtig gewählt* (dies kann natürlich präzisiert werden)*, so besitzt R einen AH-Ring.*

Bemerkung. Die Voraussetzung bei Arnol'd waren etwas stärker. Für ***Computergraphiken*** besonders geeignet ist

$$R(z) = e^{i\alpha}z^2\frac{z-r}{1-rz} \text{ mit } r > 3;$$

geeignete α sind durch Probieren zu finden.

C. Das globale Bild

Eine rationale Funktion R bildet ihre stabilen Gebiete ***eigentlich*** auf stabile Gebiete ab. Offensichtlich gibt es drei Möglichkeiten für eine Folge von stabilen Gebieten $U_n = R(U_{n-1}), n = 1, 2, 3, \ldots$:

- $U_0 = U_p$ für ein $p \in \mathbb{N}$. U_0 heißt dann ***periodisch***, mit der Periode p falls $U_0 \neq U_j$ für alle $0 < j < p$. Insbesondere für $U_0 = U_1$ heißt U_0 ***Fixgebiet.***
- U_m ist für ein $m \in \mathbb{N}$ periodisch, aber U_0 selbst ist nicht periodisch. U_0 heißt dann ***präperiodisch.***
- U_0 heißt ***wandernd*** sonst, dh. wenn $U_j \neq U_k$ für alle $j \neq k$.

Zur Erinnerung: $U_j \neq U_k$ bedeutet $U_j \cap U_k = \emptyset$.

Die wichtigste nach Fatou und Julia offengebliebene Frage war:

A. *Gibt es wandernde Gebiete?*

Satz A (Sullivan 1980/85) *Es gibt keine wandernden Gebiete.*

Nach Satz A sind vordringlich folgende Fragen zu beantworten:

B. *Können die stabilen periodischen Gebiete klassifiziert werden?*

C. *Gibt es nur endlich viele periodische Gebietszykel, oder kann es unendlich viele geben?*

Dagegen ist nach der Diskussion in Kapitel B zusammen mit der Beantwortung der Frage B auch die nachfolgende Frage erledigt:

D. *Wie ist die Dynamik in diesen periodischen Gebieten, dh., wie verhält sich die Folge der Iterierten?*

Bemerkung. Die Klassifikation findet sich implizit in den Arbeiten von Cremer und Fatou, scheint aber im Lauf der Zeit verloren gegangen zu sein, da sie seinerzeit nie zusammengefasst worden ist. Drei der schließlich ***fünf*** Typen waren bereits von Fatou und Julia untersucht worden, bei den restlichen Typen blieb offen, ob sie überhaupt existieren konnten (die Rotationsgebiete oder singulären Gebiete[13]). Von Fatou stammt die Abschätzung $4d-4$ für die Zahl der periodischen Zykel der Typen I-IV. ***Shishikura*** konnte zeigen, daß für alle Typen zusammen $2d-2$ die wahre obere Schranke ist. Die Klassifikation ist von Sullivan (1982) o. Beweis und Steinmetz (1990) neu aufgegriffen worden.

Die stabilen Fixgebiete $U = R(U)$***:***

A. ***Fatougebiete***
   - I ***Attraktives Gebiet*** U (auch ***Schrödergebiet, attracting basin***): U enthält einen attraktiven Fixpunkt z_0 $(0 < |\lambda| < 1)$, es gilt $R^n \to z_0$ in U.
   - II ***Superattraktives Gebiet*** U (auch ***Böttchergebiet, super-attracting basin***): U enthält einen superattraktiven Fixpunkt z_0, es gilt $R^n \to z_0$ in U.
   - III ***Parabolisches Gebiet*** U (auch ***Leaugebiet, parabolic basin***): ∂U enthält einen Fixpunkt z_0 mit Multiplikator $\lambda = 1$, es gilt $R^n \to z_0$ in U.

B. ***Rotationsgebiete (singuläre Gebiete)***
   - IV ***Siegelscheibe*** U (***Siegel disc***): U enthält einen Fixpunkt mit irrational indifferentem Multiplikator ($|\lambda| = 1, \lambda^m \neq 1$ für alle $m \in \mathbb{N}$), und ist einfach zusammenhängend. R ist eine konforme Selbstabbildung von U.
   - V ***Arnol'd-Herman-Ring*** U (***Herman ring***): Ein zweifach zusammenhängendes Gebiet (Ringgebiet). R ist eine konforme Selbstabbildung von U.

Fatougebiete (nicht zu verwechseln mit den ***Fatoukomponenten***, wie stabile Gebiete auch genannt werden), können einfach oder ∞-zusammenhängend sein, in ihnen konvergiert R^n gegen einen Fixpunkt. Dagegen operiert R in Rotationsgebieten wie eine Drehung in einer Kreisscheibe oder einem Kreisring.

Satz B (Cremer/Fatou) *Jedes stabile Fixgebiet ist vom Typ (I-V).*

Satz C (Shishikura 1987) *Die Zahl der nicht-abstoßenden Zykel plus 2× die Zahl der Arnol'd Herman Zykel ist* $\leq 2d-2$.

Das globale Bild sieht so aus: *Ein Punkt der Fatoumenge gelangt unter Iteration nach endlich vielen Schritten in einen Gebietszyklus* $\mathcal{U}$, *und wird dann entweder von einem Punktzyklus* α *von periodischen Punkten angezogen, oder er bleibt für alle Zeiten auf einem Zyklus* Γ *von geschlossenen analytischen Jordankurven. Die Gesamtzahl aller Zykel ist endlich (durch* $2d-2$ *beschränkt).*

[13]Julia glaubte sogar, deren *Nichtexistenz* bewiesen zu haben, hat dies später aber korrigiert.

Die Sätze A und C können hier nicht bewiesen werden, da die benötigten ***quasikonformen*** Methoden nicht zur Verfügung stehen. Statt dessen werden bewiesen:

Satz 1 *Der Klassifikationssatz* (Satz B).

Satz 2 *Es gibt insgesamt höchstens $2d-2$ (super)-attraktive oder rational indifferente Zykel, und höchstens $4d-4$ irrational indifferente Zykel.* (Bei etwas mehr Anstrengung könnte man von insgesamt $6d-6$ auf $4d-4$ kommen.)

Satz 3 (Douady u. Hubbard 1985) *Ein Polynom vom Grad d hat neben dem superattraktiven Fixpunkt ∞ höchstens $d-1$ nichtabstoßende periodische Zykel.*

Beispiel 1 $P(z) = az + (1-a)z^{n+1}, |a| > 1$. Fixpunkte $z = 0$ (abstoßend) und $z = z_j = e^{2\pi ij/n}$ mit Multiplikator $\lambda_j = \lambda = a+(n+1)(1-a)$. Bei geeigneter Wahl von a sind die z_j (super)-attraktiv.

Bemerkung. Neben der Iteration rationaler Funktionen $R : \widehat{\mathbb{C}} \longrightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ wird auch die Iteration ***ganzer Funktionen*** $g : \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C}$ betrachtet. Dabei ***können wandernde Gebiete auftreten***. Nach allgemeiner Auffassung liegt dies daran, daß die rationalen Funktionen in endlichdimensionale Klassen eingeteilt werden können (entsprechend dem Grad), dies bei den ganzen Funktionen aber nicht möglich ist. Dafür spricht einiges, es könnte aber im Fall der rationalen Funktionen auch daran liegen, daß $\widehat{\mathbb{C}}$ ***kompakt*** ist, $\mathbb{C}$ aber nicht. Die Beantwortung dieser weitgehend philosophischen Frage könnte in einen neuen Beweis des Satzes von Sullivan münden, der keine quasikonformen Methoden benötigt.

Hilfsmittel für den Beweis des Klassifikationssatzes:

Die Automorphismengruppe. Sei D ein Gebiet, und $Aut(D)$ die Gruppe (bezüglich der Komposition $\circ$ als Verknüpfung) der ***konformen Selbstabbildungen*** von D. $Aut(D)$ heißt ***nicht-diskret***, wenn es eine Folge $\phi_n \in Aut(D)$ gibt mit $\phi_n \neq \mathrm{id}_D$, aber $\phi_n \to \mathrm{id}_D$ lokal gleichmäßig in D. Es gilt:

Ist $Aut(D)$ nicht-diskret, so ist D konform äquivalent zu einem der Gebiete[14]

- $\widehat{\mathbb{C}}$; *$Aut(\widehat{\mathbb{C}})$ ist die Möbiusgruppe.*
- $\mathbb{C}$; *$Aut(\mathbb{C})$ besteht aus den euklidischen Bewegungen $z \mapsto az + b, a \neq 0$.*
- $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$; *$Aut(\mathbb{C}^*)$ besteht aus den Möbiustransformationen $z \mapsto az$ und $z \mapsto a/z$, $a \neq 0$.*
- $\mathbb{D}$; *$Aut(\mathbb{D})$ besteht aus den Möbiustransformationen $z \mapsto e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $\alpha \in \mathbb{R}, |a| < 1$.*
- $\mathbb{D}^* = \mathbb{D} \setminus \{0\}$; *$Aut(\mathbb{D}^*)$ besteht aus den Drehungen $z \mapsto az$, $|a| = 1$.*
- $\mathcal{A}_r = \{r < |z| < 1\}$; *$Aut(\mathcal{A}_r)$ besteht aus den Möbiustransformationen $z \mapsto az$ und $z \mapsto ar/z$, $|a| = 1$.*

Hilfssatz (Snail Lemma) *Sei D ein Gebiet, f holomorph in D mit $f(D) \subset D$ und $f^n \to 0$, lokal gleichmäßig in D. Weiter sei $0 \in \partial D$ und $f(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \cdots$ bei $z = 0$ mit $|\lambda| = 1$. Dann gilt für beliebiges $z_0 \in D$:*

$$f^n(z)/f^n(z_0) \to 1$$

für $n \to \infty$, lokal gleichmäßig in D, ***und*** *$\lambda = 1$.*

Beispiel 1 $R(z) = (1-2/z)^2$: $\mathcal{F} = \emptyset$. Analog $R(z) = \frac{i}{2}(z + 1/z)$.

Kritischer Orbit: $2 \Rightarrow 0 \Rightarrow \infty \to 1 \leftrightarrows 1 =$ abstoßender Fixpunkt.

[14] *Mathematische Folklore,* einen Beweis kann man sich in Tsuji, *Modern potential theory,* zusammensuchen; er wurde auch in Funktionentheorie II, WS 04/05 angegeben.

Beispiel (Morosawa) $R(z) = \dfrac{27z^2(z-1)}{(3z-2)^2(3z+1)}$.
Kritischer Orbit: $\frac{2}{3} \Rightarrow \infty \Rrightarrow 1 \to 0 \Leftrightarrow 0 =$ superattraktiver Fixpunkt. Alle stabilen Gebiete sind einfach zusammenhängend, $\mathcal{J}$ ist zusammenhängend, es gilt

$$\begin{array}{ccccccccc} & & U_* & & & & & & \\ & & \downarrow & & & & & & \\ U_* & \to & U_{\frac{2}{3}} & \Rightarrow & U_\infty & \Rrightarrow & U_1 & \to & U_0 \text{ (fix)} \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & U_* & & U_{-\frac{1}{3}} & & & & \end{array}$$

(Fortsetzung in D)

Beispiel (McMullen[15]) $R(z) = z^2 + \epsilon/z^3$, $\epsilon > 0$ hinreichend klein.

Alles endet im einfach zusammenhängenden Attraktionsgebiet $\mathcal{U}_\infty$. Es hat, außer sich selbst, nur ein Urbild $\mathcal{U}_0$, ein einfach zusammenhängendes Gebiet um 0. Dieses hat nur ein Urbildgebiet, ein Ringgebiet $\mathcal{R}$, das alle (fünf) Nullstellen und fünf (der insgesamt acht) kritischen Punkte (die fünf liegen auf $|z|^5 = \frac{3}{2}\epsilon$) enthält. Ab hier geht es regelmäßig zu: $\mathcal{R}$ hat zwei Ringebiete als Urbilder, diese jeweils wieder zwei, usw. Alle Ringebiete trennen 0 von ∞. $\mathcal{J}$ und $\mathcal{F}$ sind symmetrisch zu $\mathbb{R}$ und invariant gegenüber Drehungen um 72°.

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & \mathcal{R}_{000} & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & \mathcal{R}_{010} & & \mathcal{R}_{00} & \leftarrow & \mathcal{R}_{100} & & \\ & & \downarrow & & \downarrow & & & & \\ \mathcal{R}_{110} & \to & \mathcal{R}_{10} & \to & \mathcal{R}_0 & & & & \\ & & & & \downarrow & & & & \\ & & & & \mathcal{R} & \to & \mathcal{U}_0 & \to & \mathcal{U}_\infty \text{ (fix)} \\ & & & & \uparrow & & & & \\ \mathcal{R}_{101} & \to & \mathcal{R}_{01} & \to & \mathcal{R}_1 & & & & \\ & & \uparrow & & \uparrow & & & & \\ & & \mathcal{R}_{001} & & \mathcal{R}_{11} & \leftarrow & \mathcal{R}_{011} & & \\ & & & & \uparrow & & & & \\ & & & & \mathcal{R}_{111} & & & & \end{array}$$

Es gilt $R(\mathcal{R}_{ijk\cdots}) = \mathcal{R}_{jk\cdots}$. (Fortsetzung in D.)

D. Verschiedene Funktionenklassen

I Hyperbolische rationale Funktionen

R heißt ***hyperbolisch***[16], falls $\overline{\mathcal{O}^+(\mathcal{C})} \cap \mathcal{J} = \emptyset$. Es werden also alle kritischen Punkte von (super)-attraktiven Zykeln angezogen. Hyperbolische Funktionen haben eine Reihe von Eigenschaften, die sie positiv von anderen unterscheiden. Um sie einfacher, dh. ***euklidisch,*** formulieren zu können, setzen wir (nach Konjugation) ***generell*** $\infty \in \mathcal{F}$ voraus.

Satz 1 *R ist genau dann hyperbolisch, wenn $(R^n)'(z) \to \infty$ für $n \to \infty$, gleichmäßig auf $\mathcal{J}$.*

[15] Fieldsmedaille 1998

[16] Weiterführend: Viele Ergebnisse für hyperbolische Funktionen gelten auch für ***sub-hyperbolische***: $\overline{\mathcal{O}^+(\mathcal{C} \cap \mathcal{F})} \cap \mathcal{J} = \emptyset$ und $\mathcal{O}^+(\mathcal{C} \cap \mathcal{J})$ ist endlich. Gelegentlich werden sogar rational indifferente Zykel zugelassen.

Bemerkung. Nach Übergang zu geeignetem R^N (anstelle R) kann man so von $|R'(z)| > 1$ auf $\mathcal{J}$ ausgehen, man sagt: R ***expandiert auf*** $\mathcal{J}$.

Satz 2 *Sei P ein hyperbolisches Polynom mit zusammenhängender Juliamenge. Dann ist $\mathcal{J}$ eine* ***Kurve.*** *Besteht $\mathcal{F}$ aus zwei Gebieten, so ist $\mathcal{J}$ eine* ***Jordankurve.*** *In jedem Fall ist $\mathcal{J} : t \mapsto \psi(e^{it}), 0 \le t \le 2\pi$,* ***hölderstetig:*** *Es gibt $C > 0, 0 < \kappa < 1$ mit $|\psi(e^{it}) - \psi(e^{it'})| \le C|t - t'|^\kappa$.*

Ränderzuordnung bei konformer Abbildung. Wir behandeln den Fall des Riemannschen Abbildungssatzes: D sei einfach zusammenhängend, $\Phi : D \longrightarrow \mathbb{D}$ eine Riemann-Abbildung, Ψ ihre Umkehrfunktion. Analoge Aussagen gelten für Abbildungen eines Ringgebietes D auf einen Kreisring $\mathcal{A}$.

Zur Erinnerung:
a. Eine Kurve Γ ist (immer geschlossen und) das Bild von $\partial\mathbb{D}$ unter einer stetigen Abbildung ψ.
b. Ist ψ injektiv, so heißt Γ ***Jordankurve.***
c. Ist ψ sogar eine konforme Abbildung eines Kreisrings der Form $r < |t| < 1/r$, $0 < r < 1$, so heißt Γ ***analytisch.***

Es gelten für $\Gamma = \partial D$:
a. Γ Kurve $\Leftrightarrow$ Ψ stetig auf $\partial\mathbb{D}$.
b. Γ Jordankurve $\Leftrightarrow$ Ψ stetig auf $\partial\mathbb{D}$ und Φ stetig auf ∂D; D heißt dann ***Jordangebiet.***
c. Γ analytisch $\Leftrightarrow$ Ψ konforme Abbildung von $\{|w| < 1 + \delta\}$ auf ein Gebiet $G \supset \overline{D}$.

Lokaler Zusammenhang. Sei $E \subset \mathbb{C}$ kompakt. E heißt ***lokal zusammenhängend***, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit: Ist $a, b \in E$ mit $|a - b| < \delta$, so gibt es ein ***Kontinuum*** $K \subset E$, dh. eine kompakte zusammenhängende Teilmenge, mit $a, b \in K$ und $\operatorname{diam} K < \epsilon$. Es gilt nun: Jede Kurve ist eine zusammenhängende und lokal zusammenhängende Menge, ***und umgekehrt.*** Damit kann man ergänzen:

d. Ψ stetig auf $\partial\mathbb{D} \Leftrightarrow \partial D$ lokal zusammenhängend $\Leftrightarrow E = \hat{\mathbb{C}} \setminus D$ lokal zusammenhängend.

Folgerung aus Satz 2 *Sei P ein hyperbolisches Polynom mit zusammenhängender Juliamenge. Dann ist jedes* ***beschränkte*** *stabile Gebiet von einer* ***Jordankurve*** *berandet.*

Satz 3 *Sei R hyperbolisch. Dann ist jedes einfach zusammenhängende stabile Gebiet von einer Kurve berandet.*

Bemerkung. Ist $\mathcal{J}$ zusammenhängend, so sind alle stabilen Gebiete einfach zusammenhängend. Gibt es ein vollständig invariantes Gebiet U, so ist $\mathcal{J} = \partial U$ nach Satz 3 eine Kurve.
Und allgemein?

Satz 4 *Sei R hyperbolisch mit zusammenhängender Juliamenge. Dann ist $\mathcal{J}$ lokal zusammenhängend, und jedes stabile Gebiet von einer Kurve berandet. Besitzt R ein vollständig invariantes stabiles Gebiet, so sind* ***alle anderen*** *stabilen Gebiete* ***Jordangebiete.***

Beispiel von Morosawa (fortgesetzt). $R(z) = \dfrac{27z^2(z-1)}{(3z-2)^2(3z+1)}$ ist hyperbolisch, und alle stabilen Gebiete sind einfach zusammenhängend. Damit ist $\mathcal{J}$ lokal zusammenhängend. Alle stabilen Gebiete sind ***Jordangebiete***, für je zwei gilt $\overline{U} \cap \overline{V} = \emptyset$. $\mathcal{J}$ ist ein ***Sierpinski-Teppich.***

Die Juliamenge eines Polynoms P ist genau dann zusammenhängend, wenn $P'(z) \ne 0$ in $\mathcal{A}_\infty$ ist. Das andere Extrem ist, daß $P'(z) = 0$ ***nur in*** $\mathcal{A}_\infty$ gilt.

Satz 5 *Sei P ein hyperbolisches Polynom, und $\mathcal{A}_\infty$ enthalte alle kritischen Punkte. Dann ist $\mathcal{J}$ total unzusammenhängend **(Cantormenge, staubförmig, Fatou dust).** Jedes $z \in \mathcal{J}$ hat eine eindeutig bestimmte **Adresse** $i = (i_1, i_2, i_3, \ldots) \in \{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbb{N}}$, es gilt $P(z_{i_1 i_2 i_3 \ldots}) = z_{i_2 i_3 i_4 \ldots}$.*

Bemerkung. Die (prä-)periodischen Punkte sind die mit (prä-)periodischer Adresse. Ein analoger Satz gilt allgemein für hyperbolische Funktionen mit vollständig invariantem stabilen Gebiet, das alle kritischen Punkte enthält.

Hauptidee zum Beweis von Satz 5: Konstruiere Jordangebiet Δ so: $R(\overline{\Delta}) \subset \Delta$, Δ enthält alle kritischen Werte und ist einfach zusammenhängend. In $D = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\Delta}$ existieren alle d^n Umkehrfunktionen $\Phi_{i_1 i_2 \ldots i_n}$ von R^n, sie sind ***kontrahierend.*** Die Hauptschwierigkeit ist die Konstruktion von Δ. Hier (bei Polynomen) helfen die Greensche Funktion von $\mathcal{A}_\infty$, ihre ***Niveaulinien*** $\{z : G(z) = h\}$ und die zugehörigen ***Orthogonaltrajektorien,*** die ***Feldlinien***; es sind dies die Trajektorien von

$$z' = i\overline{H(z)} \text{ bzw. } z' = \overline{H(z)},$$

wobei $H := G_x - iG_y$ in $\mathcal{A}_\infty$ ***holomorph*** ist. Als reelle Systeme geschrieben lauten die Trajektoriengleichungen:

$$\begin{array}{rcl} x' &=& -G_y(x,y) \\ y' &=& G_x(x,y) \end{array} \quad \text{bzw.} \quad \begin{array}{rcl} x' &=& G_x(x,y) \\ y' &=& G_y(x,y) \end{array}$$

Was in Satz 5 beschrieben wird heißt ***symbolische Dynamik***, anstelle P auf $\mathcal{J}$ betrachtet man den ***Links-Shift*** im ***Symbolraum*** $\Sigma = \{1, 2, \ldots, d\}^{\mathbb{N}}$, $(i_1, i_2, i_3, \ldots) \mapsto (i_2, i_3, i_4, \ldots)$..

Beispiel. Gesucht ist $z \in \mathcal{J}$ mit dichter Bahn. Über Σ kann man d^n Wörter der Länge n bilden, schreibt man diese Blöcke hintereinander für $n = 1, 2, \ldots$, so entsteht i, zB. $d = 2$ und (vertrauter) 01 anstelle 12 (dabei hat | nur optische Bedeutung):

$$i = (0|1|00|01|10|11|000|001|010|100|011|101|110|111|\ldots)$$

z_i hat eine dichte Bahn!
Ähnliches liegt vor beim

Beispiel von McMullen (fortgesetzt). $R(z) = z^2 + \epsilon/z^3$ ist hyperbolisch und $\mathcal{J} = \bigcup_{i \in \{0,1\}^{\mathbb{N}}} K_i$. Die Komponenten $K_i = K_{i_1 i_2 i_3 \ldots}$ sind Jordankurven, es gilt $R(K_{i_1 i_2 i_3 \ldots}) = K_{i_2 i_3 i_4 \ldots}$. ZB. ist $\partial\mathcal{U}_\infty = K_{111\ldots}$, $\partial\mathcal{U}_0 = K_{011\ldots}$. $K_{000\ldots}$ wird fixiert von R, und ist eine ***begrabene (buried) Komponente***: Kein Punkt ist Randpunkt eines stabilen Gebietes.

Ein invariantes Maß (Lyubich 1983). Sei R hyperbolisch (dies ist nicht notwendig, hilft aber sehr) und $a \in \mathcal{J}$ mit den Urbildern a_j^n unter R^n. Man erhält eine Folge von Wahrscheinlichkeitsmaßen (abhängig von a):

$$\mu_n(E) = d^{-n} \sum_{a_j^n \in E} 1 = d^{-n} \sum_j \delta_{a_j^n}(E);$$

δ_z ist das ***Dirac-Maß*** .

*Diese Folge konvergiert **schwach** gegen ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ:*

$$\int_{\mathcal{J}} \phi(z) d\mu_n \to \int_{\mathcal{J}} \phi(z) d\mu$$

für jede stetige Funktion $\phi : \mathcal{J} \longrightarrow \mathbb{R}$. Es gilt:

a. *μ ist unabhängig von a.*
b. $\operatorname{supp}(\mu) = \mathcal{J}$.
c. $\mu(\{c\}) = 0$.
d. $\mu(R^{-1}(E)) = \mu(E)$ ***(Invarianz).***
e. $\mu(E) = \lim_{n\to\infty} d^{-n} \sum_{z=R^n(z)} \delta_z(E)$ (für ***Borelmengen***).

Aussage ***e.*** besagt, daß die periodischen Punkte bzgl. μ auf $\mathcal{J}$ ***gleichverteilt*** sind und nicht nur ***dicht liegen.*** Ist O offen, so liegen in O asymptotisch $d^n\mu(O)$ abstoßende periodische Punkte.

II Polynome

$$P(z) = a_0 + a_1 z + \cdots + a_{d-1}z^{d-1} + z^d \text{ normiert bei } \infty.$$

Bemerkungen/Wiederholung/Bezeichnungen:
a. Die Greensche Funktion G von $\mathcal{A}_\infty$ mit Pol in ∞ existiert; es gilt

$$G(z) = \lim_{n\to\infty} d^{-n}\log|P^n(z)|$$

und $G(P(z)) = dG(z)$.
b. Falls $\mathcal{J}$ zusammenhängend ist, so ist die Böttcherfunktion $\Phi : \mathcal{A}_\infty \longrightarrow \{|w| > 1\}$ konforme Abbildung und $G(z) = \log|\Phi(z)|$.
c. Ist P zusätzlich hyperbolisch, so ist Φ^{-1} in $\{|w| \geq 1\}$ stetig und $\mathcal{J} = \partial\mathcal{A}_\infty = \Phi^{-1}(\partial\mathbb{D})$ eine Kurve, insbesondere ist jeder Punkt $z_t = \Phi^{-1}(e^{2\pi it}) \in \mathcal{J}$ trivialerweise ***erreichbar:*** $z_t = \lim_{r\to 1+}\Phi^{-1}(re^{2\pi it}) = \Phi^{-1}(e^{2\pi it})$ existiert.
d. Ist $\mathcal{J}$ zusammenhängend, so heißt der Weg $\mathcal{R}_t : r \mapsto \Phi^{-1}(re^{2\pi it}), 1 < r < \infty$, ***externer Strahl (external ray)***. Es gilt $P(\mathcal{R}_t) = \mathcal{R}_{dt}$, und $\mathcal{R}_t$ ist genau dann p-periodisch, wenn $d^p t \equiv t \bmod 1$. Falls $\lim_{r\to 1}\Phi^{-1}(re^{2\pi it}) =: z_t$ existiert, so sagt man: Der Strahl $\mathcal{R}_t$ ***landet*** in z_t.

Satz 1 (Erreichbarkeit abstoßender und rational indifferenter Fixpunkte) *Jeder abstoßende bzw. rational indifferente Fixpunkt a ist* ***invariant erreichbar.*** *Es gibt einen Weg $\beta : \mathbb{R} \longrightarrow \mathcal{A}_\infty$ mit $\lim\limits_{t\to-\infty}\beta(t) = a$, $\lim\limits_{t\to\infty}\beta(t) = \infty$ und:*
a. $(|\lambda| > 1)$*:* $P^N(\beta) = \beta$ *für ein* $N \in \mathbb{N}$.
b. $(\lambda = 1)$*:* $P(\beta) = \beta$.
c. $(\lambda^m = 1)$*:* $P^m(\beta) = \beta$.

Das harmonische Maß für eine Kreisscheibe $\mathbb{K} : |z| < R$ bzw. eine Halbebene $\mathbb{H} : \operatorname{Re} z < R :$ Sei D ein Gebiet und U harmonisch in D mit $U = 0$ auf $\partial D \setminus \{\infty\}$.

a. Es sei $D \cap \partial\mathbb{K} = \beta = \bigcup_j \beta_j \neq \emptyset$; die β_j sind Bögen, sie entsprechen den offenen Intervallen (θ_j, θ_j'), $I = \bigcup_j(\theta_j, \theta_j')$. Dann gilt in $D \cap \mathbb{K}:$

$$U(z) \leq M\omega(z) = \frac{M}{2\pi}\int_I \operatorname{Re}\left(\frac{Re^{i\theta} + z}{Re^{i\theta} - z}\right)d\theta;\ M = \sup\{U(z) : |z| = R, z \in D\}.$$

b. Analog für $\mathbb{H}$ anstelle $\mathbb{K}$ und $D \cap \partial\mathbb{H} = \beta = \bigcup_j \beta_j \neq \emptyset$. Diesmal sind die β_j Strecken von $R + i\theta_j$ nach $R + i\theta_j'$ auf $R + i\mathbb{R}$ mit $\sum_j(\theta_j' - \theta_j) < \infty$. Es gilt in $D \cap \mathbb{H}:$

$$U(z) \leq M\omega(z) = \frac{M}{\pi}\sum_j \arg\left(\frac{R + i\theta_j' - z}{R + i\theta_j - z}\right);\ M = \sup\{U(z) : \operatorname{Re} z = R, z \in D\}.$$

Satz 2 *Sei $\mathcal{J}$ zusammenhängend. Dann landet in jedem abstoßenden oder rational indifferenten Fixpunkt a ein periodischer externer Strahl $\mathcal{R}_t$. Es gilt wie in Satz 1:*
a. $(|\lambda| > 1)$*:* $P^N(\mathcal{R}_t) = \mathcal{R}_t$, *dh.* $d^N t \equiv t$ *mod* 1 *für ein* $N \in \mathbb{N}$.
b. $(\lambda = 1)$*:* $P(\mathcal{R}_t) = \mathcal{R}_t$, $dt \equiv t$ *mod* 1.
c. $(\lambda^m = 1)$*:* $P^m(\mathcal{R}_t) = \mathcal{R}_t$. $d^m t \equiv t$ *mod* 1.

Bemerkung. Die Sätze 2 und 3 stammen von ***Douady*** und ***Hubbard,*** Satz 1 ist von ***Eremenko*** und ***Levin***. In ***a.*** ist i.A. ***nicht*** $N = 1$. Die Erweiterung auf ***periodische*** Punkte liegt auf der Hand, sie wird nicht eigens formuliert.

Satz 3 (Periodische Strahlen landen) *Sei $\mathcal{J}$ zusammenhängend. Dann landet jeder periodische externe Strahl $\mathcal{R}_t$ in einem abstoßenden oder rational indifferenten periodischen Punkt $a = z_t$*

der Juliamenge. Alle Strahlen, die in z_t landen sind periodisch mit derselben Periode; die Periode von z_t teilt die Periode der Strahlen. Im Zentrum einer Leau-Blume mit m Blättern landen m (oder mehr) Strahlen.

Computerexperiment. $P(z) = z - z^{m+1} + z^{m+n+1}/z_0^n$ hat eine Leaublume um $z = 0$ mit m Blättern. Bei geeigneter Wahl von z_0 sind die $z_j = e^{2\pi ij/n} z_0$ (super)-attraktive Fixpunkte. Ihre Attraktionsgebiete enthalten $z = 0$ auf dem Rand.

Satz 3a (Pommerenke) *Sei R rational, U ein einfach zusammenhängendes Fatou-Fixgebiet, und $\Psi : \mathbb{D} \longrightarrow U$ eine konforme Abbildung. Dann ist $B = \Psi^{-1} \circ R \circ \Psi$ ein Blaschkeprodukt, und es gilt:*

$$\lim_{r \to 1} \Psi(re^{it}) = a = R(a)$$

existiert falls $B(e^{it}) = e^{it}$. Der Fixpunkt a ist abstoßend oder rational indifferent ($\lambda = 1$).

Für die Sätze 3/3a benötigt man die ***Poincaré-Metrik*** eines einfach zusammenhängenden Gebietes D :

a. $D = \mathbb{D}$. Die Metrik $\delta_{\mathbb{D}}(a, b) = \log \dfrac{1 + \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|}{1 - \left|\frac{a-b}{1-\bar{a}b}\right|}$ mit der ***Dichte*** $\varrho_{\mathbb{D}} = \dfrac{2}{1 - |z|^2}$ ist invariant unter konformen Selbstabbildungen von $\mathbb{D}$, holomorphe Abbildungen $f : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{D}$ verkürzen Abstände: $\delta_{\mathbb{D}}(f(a), f(b)) \leq \delta_{\mathbb{D}}(a, b)$, Gleichheit gilt nur für konforme Selbstabbildungen (Funktionentheorie I).

b. Ist $\psi : D \longrightarrow \mathbb{D}$ eine Riemann-Abbildung, so kann diese Metrik nach D verpflanzt werden: $\delta_D(a, b) = \delta_{\mathbb{D}}(\psi(a), \psi(b))$. Sie ist wegen des Lemmas von Schwarz-Pick ***unabhängig*** von ψ, und damit ***konform invariant:*** $\delta_D(a, b) = \delta_G(\phi(a), \phi(b))$ für ***jede*** konforme Abbildung $\phi : D \longrightarrow G$ eines einfach zusammenhängenden Gebietes auf ein anderes.

Satz 4 *Polynome mit Cremerpunkten haben **keine** lokal zusammenhängende Juliamenge.*

Vertauschbare rationale Funktionen haben eine gemeinsame Juliamenge. Dies nutzt man, um die ***vertauschbaren Polynome*** zu bestimmen, ein eigentlich algebraisches Problem.

Satz 5 (Ritt/Fatou um 1920) *Zwei Polynome P und Q sind genau in einem der folgenden Fälle vertauschbar:*

a. *P und Q sind gemeinsame Iterierte eines dritten Polynoms R.*

b. *P und Q sind (gemeinsam) konjugiert zu je einem Tschebyscheffpolynom.*

c. *P und Q sind (gemeinsam) konjugiert zu je einem Polynom der Form az^d und bz^m, $|a| = |b| = 1$.*

Zu gegebener Juliamenge eines Polynoms sei $\mathcal{P}(\mathcal{J})$ die Menge alle Polynome mit dieser Juliamenge. Durch geeignete Konjugation kann man erreichen: $\mathcal{P} = \mathcal{P}(\mathcal{J})$ enthält ein Polynom kleinsten Grades mit der Normierung $P(z) = a_0 + \cdots + a_{d-2}z^{d-2} + z^d$. Dann gilt:

Satz 6 (Schmidt, St.) *Es ist für geeignetes $m \in \mathbb{N}$*

$$\mathcal{P}(\mathcal{J}) = \{\sigma P^n : n \in \mathbb{N}, \sigma^m = 1\}.$$

Weiter gilt $P(z) = z^q P_0(z^m)$ für geeignete $q \in \mathbb{N}_0, m \in \mathbb{N}$, dh. insbesondere: $\mathcal{J}$ ist invariant gegenüber den Drehungen $z \mapsto \sigma z$.

Beweisidee. Alle Polynome in $\mathcal{P}(\mathcal{J})$ haben sie auch die gleiche Böttcherfunktion Φ und Greensche Funktion G, da diese durch $\mathcal{J}$ eindeutig bestimmt ist.

III Die Mandelbrotmenge

Quadratische Polynome $P_c(z) = z^2 + c$ haben den ***freien kritischen Punkt*** $z = 0$. Ist seine Bahn ***beschränkt***, so ist die zugehörige Juliamenge $\mathcal{J}_c$ zusammenhängend, andernfalls total unzusammenhängend (staubförmig).

Die Mandelbrotmenge ist definiert durch

$$\mathcal{M} = \{c \in \mathbb{C} : \mathcal{J}_c \text{ zusammenhängend } \}.$$

Definiere ***rekursiv*** (nicht: iterativ) Polynome Q_n vom Grad 2^n :

$$Q_0(c) = c,\ Q_n(c) = Q_{n-1}(c)^2 + c,\ \text{ also } Q_n(c) = P_c^n(c).$$

Dann gilt: $c \in \mathcal{M} \Leftrightarrow |Q_n(c)| \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Insbesondere ist

$$\mathcal{M} = \bigcap_{n \in \mathbb{N}} \{c : |Q_n(c)| \leq 2\}$$

kompakt, und enthält alle c, für die P_c einen nicht-abstoßenden Zykel in $\mathbb{C}$ besitzt.

Computergraphik. $\mathcal{M}$ wird von außen approximiert durch $\bigcap_{n \leq N} \{c : |Q_n(c)| \leq 2\}$, dh., berechnet man in der c-(Parameter-)Ebene : $c_0 = c$, $c_n = c_{n-1}^2 + c$, so erhält man näherungsweise ein Bild von $\mathcal{M}$ folgendermaßen[17]: Das zu c gehörige Pixel erhält die Farbe schwarz, falls $|c_n| \leq 2$ für $n \leq N$. Ist dagegen n der erste Index $< N$ mit $|c_n| > 2$, so erhält das Pixel die Farbe $1 + n \bmod 15$ (bei 15 vorhandenen Farben).

Satz 1 *Das Komplement von $\mathcal{M}$ ist ein Gebiet.*

Hyperbolische Komponenten. Eine Komponente C von $\mathcal{M}^\circ$ heißt ***hyperbolisch,*** wenn sie ein c enthält, so daß P_c einen (super)-attraktiven Zyklus besitzt. Es ist dann P_c hyperbolisch.

Satz 2 *Ist C eine hyperbolische Komponente, so ist P_c für alle $c \in C$ hyperbolisch und besitzt einen (super)-attraktiven Zyklus der konstanten Länge p. Der Rand von C ist eine algebraische Kurve.*

Aufgabe. $\mathcal{M}$ enthält:
a. Das Intervall $[-2, 1/4]$.
b. Die ***Kardioide*** $\{|1 - \sqrt{1 - 4c}| < 1\}$.
c. Die Kreisscheibe $\{|c + 1| < 1/4\}$.
Man zeige: b. und c. sind hyperbolische Komponenten.

Satz 3 $G(c) = \lim_{n \to \infty} 2^{-n} \log |Q_n(c)|$ *ist die* ***Greensche Funktion*** *des Außengebietes $\widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ mit Pol in ∞.*

Satz 4 (Douady und Hubbard) *Die Mandelbrotmenge ist zusammenhängend. Ihr Aussengebiet wird durch*

$$\Phi(c) = \lim_{n \to \infty} c \sqrt[2^n]{Q_n(c)/c^{2^n}}$$

konform auf $\Delta = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ abgebildet.

In mancher Hinsicht ähnelt $\mathcal{M}$ einer zusammenhängenden aufgefüllten Juliamenge.

Offene Fragen.
a. Sind ***alle*** Komponenten von $\mathcal{M}^\circ$ hyperbolisch?
b. Ist $\partial\mathcal{M}$ lokal zusammenhängend? Eine positive Antwort beantwortet auch ***a.*** positiv.

[17] Das ist der Beitrag von Mandelbrot.

IV Glatte Juliamengen

Satz 1 *Wenn $\mathcal{J}$ einen* ***freien*** *Jordanbogen α enthält, so ist $\mathcal{J}$ selbst ein Jordanbogen oder eine Jordankurve.*

Bemerkung. Frei heißt dabei: $(\mathcal{J} \setminus \overline{\alpha}) \cap \alpha^* = \emptyset$; α^* ist α ohne Endpunkte.

Satz 2 *Sei P ein Polynom, dessen Juliamenge ein* ***Jordanbogen*** *ist. Dann ist P oder $-P$ konjugiert zu einem* ***Tschebyscheffpolynom,*** *und $\mathcal{J}$ ist eine Strecke.*

Satz 2a *Die Juliamenge von R sei ein* ***Jordanbogen*** *mit Endpunkten a, b. Dann liegen auf $\mathcal{J}$ genau $d-1$ einfache kritische Punkte $c_1, \ldots, c_{d-1}$, und es gilt $R(\{a, b, c_1, \ldots, c_{d-1}\}) = \{a, b\}$.*

Glatte Juliamengen sind bisher aufgetreten:

a. $\mathcal{J} = \partial\mathbb{D}$ für Blaschkeprodukte.
b. $\mathcal{J} = [-2, 2]$ für $P(z) = z^2 - 2$ (konjugiert zum Tschebyscheffpolynom T_2).
c. $\mathcal{J} = i\widehat{\mathbb{R}}$ für $R(z) = \dfrac{1}{2}\Big(z + \dfrac{1}{z}\Big)$.
d. Aufgabe. $\mathcal{J} = [0, +\infty]$ für $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, die ***Koebefunktion.***

Gibt es andere glatte Juliamengen? Was ist eine Tangente an eine kompakte Menge E, die möglicherweise keine Kurve ist?

Sei $a \in E$ und $\hat{E}(a)$ die Menge der Häufungspunkte von $\arg(z - a)$ für $z \to a$ in E. Wenn E eine Kurve ohne Doppelpunkte mit Tangente in a ist, so ist $\hat{E}(a) = \{\alpha, \alpha + \pi\}$; bei einseitigen Tangenten ist $\hat{E}(a) = \{\alpha, \beta\}$; Ist E eine glatte Kurve, die sich in a endlich oft überschneidet, so ist $\hat{E}(a)$ ***endlich.***

Satz 3 *Sei R hyperbolisch und $\hat{\mathcal{J}}(a)$ für ein $a \in \mathcal{J}$ endlich. Dann ist $\mathcal{J}$ eine analytische Jordankurve oder ein analytischer Jordanbogen.*

Satz 4 *Sei $\mathcal{J}$ eine analytische Jordankurve. Dann ist $\mathcal{J}$ ein Kreis in $\widehat{\mathbb{C}}$ und R ist konjugiert zu einem Blaschkeprodukt.*

Satz 5 *Sei $\mathcal{J}$ ein analytischer Jordanbogen. Dann ist $\mathcal{J}$ ein Kreisbogen in $\widehat{\mathbb{C}}$ und es gilt: Es gibt eine rationale Funktion h vom Grad 2, so daß $h \circ R = B \circ h$, B ein Blaschkeprodukt, ist. $\mathcal{F} = U$ ist einfach zusammenhängend, und h bildet sowohl $\mathbb{D}$ als auch Δ konform auf U ab. $\mathcal{J}$ ist eine Strecke oder ein Kreisbogen.*

Aufgabe. Man bestimme alle rationalen Funktionen R vom Grad 2 mit kritischen Punkten c_1, c_2 auf $\partial\mathbb{D}$ sowie die zugehörigen Bilder $R(\mathbb{D})$.

E. Aufgabensammlung

Hinweis zu Computerexperimenten: Die Ausschnitte $[a, b] \times [c, d] \subset \mathbb{C}$ sind so zu wählen, dass das Verhältnis $q = (b - a) : (d - c)$ der Auflösung des Bildschirms entspricht; bei den Aufgaben wird oft $q = 4 : 3 = 1024 : 768$ angegeben, dies ist aber nicht zwingend. Es reichen $15 = 2^4 - 1$ bis $255 = 2^8 - 1$ Farben sowie Schwarz (und Weiss) aus.
Es können gar nicht genug Computerexperimente gemacht werden, durch Spielerei an Parametern werden oft unerwartete Phänomene sichtbar.

Teil A

(1) Zeigen Sie, dass

(i) jedes quadratische Polynom zu genau einem Polynom der Form $P_c(z) = z^2 + c$ konjugiert ist. Berechnen Sie für $Q_\lambda(z) = \lambda z + z^2$ das zugehörige c. Wie könnte ein derartiges Ergebnis für Grad-d-Polynome aussehen?

(ii) jede rationale Funktion zweiten Grades zu einer Funktion der Form $R(z) = \dfrac{az^2 + b}{cz^2 + d}$, $ad - bc = 1$, konjugiert ist. Ist diese Darstellung eindeutig?

(iii) $R(z) = \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ zu einem quadratischen Polynom P konjugiert ist; was ist das einfachste P?

(2) Bestimmen Sie die Fixpunkte in $\widehat{\mathbb{C}}$ und deren Multiplikatoren von (i) $R(z) = \dfrac{z^3}{z+1}$, (ii) $R(z) = \dfrac{az^2}{z+b}$, $ab \neq 0$, und (iii) $P(z) = z + az(1 - z^n)$, $a \neq 0$.

(3) Finden Sie alle Fixpunkte und 2-Zykel von (i) $P(z) = z^2 + i$, (ii) $P(z) = z^2 - 1$ und (iii) $P(z) = 2z^2 - 1$, und bestimmen Sie die jeweiligen Multiplikatoren.

(4) Bestätigen Sie die Invarianz von Multiplikatoren und der Anzahl und Vielfachheit der kritischen Punkten unter Konjugation: Sind R und $R_1 = M \circ R \circ M^{-1}$ konjugiert, M eine Möbiustransformation, so gilt:

i) Ist α ein p-Zykel von R mit Multiplikator λ, so ist $M(\alpha)$ ein p-Zykel von R_1 mit demselben Multiplikator λ.

ii) Ist c ein kritischer Punkt von R der Vielfachheit q, so ist $M(c)$ ein kritischer Punkt von R_1 derselben Vielfachheit (ohne Rechnung: In einer Umgebung eines $(r-1)$-fachen kritischen Punktes ist R eine $r:1$-Abbildung).

iii) R hat $2d - 2$ kritische Punkte (mit Vielfachheit gezählt). Hinweis: Nehmen Sie zuerst an, dass ∞ weder kritischer Punkt noch kritischer Wert ist.

(5) Zeigen Sie, dass die Kreisscheibe $|z - \frac{1}{2}| < \frac{1}{2}$ von $P(z) = z - z^2$ in sich selbst abgebildet wird.

(6) Zeigen Sie, dass für $P(z) = z^2 - 1$ die Iteriertenfolge (P^n) in $|z| < r$ und in $|z + 1| < r^2$ normal ist, wobei $r \approx 0.45$ die reelle Lösung der Gleichung $r^3 + 2r = 1$ ist.

(7) Bestimmen Sie die Mengen aller $c \in \mathbb{C}$, für die das Polynom $P_c(z) = z^2 + c$

a) einen attraktiven Fixpunkt

b) einen attraktiven 2-Zykel (Hinweis: $P(z) - z$ ist ein Teiler von $P^2(z) - z$).

hat; skizzieren Sie diese Mengen in der c-Ebene.

(8) Einfaches Computerexperiment für $P(z) = z^2 + c$, $|c| \leq 2$: Der Rahmen $-2 < x < 2$, $-1.5 < y < 1.5$ entspricht dem Bildschirm, einem Pixel p wird sein Mittelpunkt $z_0(p)$ zugeordnet, und $z_n = P^n(z_0(p))$ solange berechnet bis entweder $|z_n| > 2$ oder aber $n = N + 1$ (etwa $N = 100$) ist. Im ersten Fall erhält p die Farbe Weiss, sonst Schwarz. Schwarz approximiert die aufgefüllte Juliamenge. Für $c = i$ und viele andere wird man nur Weiss sehen. Deswegen sollte Weiss ersetzt werden durch die Farbe n mod 15 o.ä. Dort wo sich die Farben schnell abwechseln ist die Juliamenge zu suchen.

(9) Sei $R_c(z) = cz + 1/z$ mit $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$. Zeigen Sie:

a) Die Halbebenen $\mathbb{H}^+ = \{z : \operatorname{Re} z > 0\}$ und $\mathbb{H}^- = \{z : \operatorname{Re} z < 0\}$ sind invariant, gehören also zur Fatoumenge $\mathcal{F}_c$.

b) Für $|c| > 1$ ist ∞ attraktiv, und $\mathcal{F}_c$ enthält neben $\mathbb{H}^\pm$ noch $\{z : |z| > r\}$ und $\{z : |z| < \rho\}$, $r > \rho > 0$ passend.

c) Für $|c| < 1$ hat R zwei attraktive Fixpunkte $x_\pm \in \mathbb{H}^\pm$, und es ist $\mathcal{J}_c = i\widehat{\mathbb{R}}$.

(10) Zeigen Sie, dass die Juliamenge

a) einer reellen rationalen Funktion symmetrisch zu $\mathbb{R}$ ist.

b) von $R(z) = z^p R_0(z^m)$, $0 \leq p < m$, symmetrisch bezüglich der von $z \mapsto z\, e^{2\pi i/m}$ erzeugten Gruppe ist. Was folgt daraus für gerade und ungerade Funktionen?

(11) Zeigen Sie $\mathcal{J}_R = \mathcal{J}_S$ für vertauschbare rationale Funktionen R und S über folgende Zwischenschritte: i) $R^n \circ S = S \circ R^n$ für alle $n \in \mathbb{N}$ und ii) $S(\mathcal{F}_R) \subseteq \mathcal{F}_S$.

(12) Geben Sie ein Polynom der Form $P(z) = z^3 + az + b$ an, so dass die zugehörige Newtonfunktion $N(z) = z - P(z)/P'(z)$ einen superattraktiven 2-Zyklus $\alpha, 0 \in \alpha$, besitzt. Welche Auswirkung hat dies auf das Newtonverfahren?

(13) Zeigen Sie, dass die Juliamenge von $P(z) = z^2 + c$ für $c > 1/4$ nicht zusammenhängend ist. Hinweis: Zeigen Sie zuerst $[c, \infty) \subset A_\infty$, indem Sie (x_n) mit $x_0 \geq c$, $x_n = x_{n-1}^2 + c$, untersuchen, und dann $\mathbb{R} \subset A_\infty \subseteq \mathcal{F}$.

(14) Sei $\Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ der Raum der 01-Folgen und $S : \Sigma \to \Sigma,\ S(j_1, j_2, j_3, \ldots) = (j_2, j_3, j_4, \ldots)$ der ***Bernoulli-Shift***. Zeigen Sie: Σ ist überabzählbar und bestimmen Sie alle Fixpunkte von $S^p,\ p \in \mathbb{N}$.

(15) Es sei $P(z) = z^2 + c$. Zeigen Sie, dass für $|c| > 2 + \sqrt{2}$ ein Radius $R = R(|c|) > 0$ so gewählt werden kann, dass gilt:
   a) $\Delta = \{z : |z| \geq R\}$ ist vorwärts-, somit $D = \{z : |z| < R\}$ rückwärts invariant (erfüllt für $R^2 - |c| \geq R$).
   b) In D existieren beide Umkehrfunktionen Φ_0 und Φ_1 von P (erfüllt für $|c| \geq R$).
   c) $|\Phi_j'(w)| \leq 1/2$ in D, $j = 0, 1$ (erfüllt für $|c| - |w| \geq 1$ in D).
   d) Für jedes $n \in \mathbb{N}$ ist die Juliamenge $\mathcal{J}$ enthalten in der Vereinigung der 2^n disjunkten Gebiete $D_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \Phi_{j_1} \circ \Phi_{j_2} \circ \ldots \circ \Phi_{j_n}(D),\ j_1, \ldots, j_n \in \{0,1\}$; jedes hat einen Durchmesser $\leq 2R \cdot 2^{-n}$, und es gilt $\overline{D_{j_1 \ldots j_n j_{n+1}}} \subset D_{j_1 \ldots j_n}$.
   e) Für $\mathsf{j} = (j_1 j_2 \ldots) \in \Sigma = \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ ist $\bigcap_{n \in \mathbb{N}} D_{j_1 j_2 \ldots j_n} = \{z_{\mathsf{j}}\}$, und die Abbildung $\Phi : \Sigma \to \mathcal{J},\ \mathsf{j} \mapsto z_{\mathsf{j}}$, ist bijektiv.
   f) Es gilt $P \circ \Phi = \Phi \circ S$ (S der Bernoulli-Shift). Welchen Punkten z_0 und z_1 entsprechen (bei geeigneter Numerierung) $\mathsf{0} = (000\ldots)$ und $\mathsf{1} = (111\ldots)$?
   g) Die Abbildungen Φ und Φ^{-1} sind stetig, wenn man auf Σ die Metrik $\varrho(\mathsf{j}, \mathsf{k}) = \sum_{n=1}^{\infty} 2^{-n} |j_n - k_n|$ einführt. Achtung: $\varrho((1000\ldots), (0111\ldots)) = 1$.

(16) Konstruieren Sie ein reelles Polynom möglichst niedrigen Grades mit dem Fixpunkt $z = 0$ mit Multiplikator $\lambda = 1$, und zwei [bzw. n](super)-attraktiven Fixpunkten.

(17) Konstruieren Sie ein Polynom P vom Grad d mit $d - 1$ superattraktiven Fixpunkten ζ_j. Hinweis: Machen Sie einen hochgradig symmetrischen Ansatz, oder suchen Sie in den vorherigen Aufgaben.

Computerexperiment: Ein Rechteck $W \subset \mathbb{C}$ wird identifiziert mit dem Bildschirm, dem Mittelpunkt des Pixels p_0 entspricht die komplexe Zahl z_0. Nach Festlegung von $N \in \mathbb{N}$ (etwa $= 100 - 1000$) und $\epsilon > 0$ (etwa $= 0.01$ oder kleiner) wird $z_n = P(z_{n-1})$ gebildet, solange bis $|z_n - \zeta_j| < \epsilon$ oder $|z_n| > 1/\epsilon$ oder $n = N + 1$ ist. Das Pixel p_0 erhält dann die Farbe j oder $d + 1$ oder 0 (Schwarz). Innerhalb der Farben können Helligkeitsstufen n mod 10 benutzt werden.

(18) a) Es sei $f : G \to H$ eine eigentliche Abbildung, $\tilde{H} \subset H$ ein Gebiet und $\widetilde{G}$ eine Komponente von $f^{-1}(\tilde{H})$. Zeigen Sie, dass $f|_{\tilde{G}} \ :\ \tilde{G} \to \widetilde{H}$ eine eigentliche Abbildung ist.
   b) Es sei P ein Polynom, $D_r = D_r(0) = \{z \in \mathbb{C}\ :\ |z| < r\}$ und G eine Komponente von $P^{-1}(D_r)$. Zeigen Sie, dass $P|_G\ :\ G \to D_r$ eigentlich ist.
   c) Das Polynom P habe n verschiedene Nullstellen mit Vielfachheiten $k_1, \ldots, k_n$. Zeigen Sie: Für hinreichend kleines r gibt es n disjunkte Gebiete $G_1, \ldots, G_n$ wie in b) und $\deg P|_{G_j} = k_j$

(19) Sei $P(z) = z^2 + c$ und A_∞ das Attraktionsgebiet von ∞. Zeigen Sie
   i) A_∞ ist entweder einfach oder unendlichfach zusammenhängend.
   ii) A_∞ ist genau dann einfach zusammenhängend, wenn $0 \in A_\infty$ ist.

Computerexperiment wie in Aufgabe 17.

Teil B I/II

(1) Sei D_n eine aufsteigende Folge einfach zusammenhängender Gebiete $D_1 \subset D_2 \subset \ldots$ und $D = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} D_n$. Zeigen Sie, dass D ein einfach zusammenhängendes Gebiet ist.

(2) Sei $P(z) = \lambda z + z^3$ mit $0 < |\lambda| < 1$ und U die Fatoukomponente (stabiles Gebiet), die 0 enthält.
  i) Zeigen Sie, dass beide endlichen kritischen Punkte von P in U enthalten sind und das P auf U den Grad 3 hat.
  ii) Zeigen Sie, dass die Lösung der Schröderschen Funktionalgleichung $\phi(P(z)) = \lambda\phi(z)$ ungerade ist.
  iii) Es sei $\Phi : U \to \mathbb{D}$ die konforme Abbildung mit $\Phi(0) = 0$ und $\Phi'(0) > 0$. Zeigen Sie $\Phi \circ P \circ \Phi^{-1}(w) = e^{i\alpha} w \dfrac{w^2 - a^2}{1 - a^2 w^2}$. Kann man α, a bestimmen?

  Versuchen Sie, diese Aussage auf $P(z) = \lambda z + z^n$ zu verallgemeinern.

(3) Computerexperiment: Für $P(z) = \lambda z + z^2$ mit Kœnigsfunktion ϕ liegt $z = -\lambda/2$ auf dem Rand des Schlichheitsgebietes D von ϕ. Setzt man $\epsilon = |P^N(-\lambda/2)|$, N fest (etwa $N = 10$), so kann man D visualisieren: D ist ungefähr die Komponente von $\{z : |P^N(z)| < \epsilon\}$, die 0 enthält.

(4) Berechnen Sie (etwa mit maple) die ersten Koeffizienten der Kœnigsfunktion von $P(z) = \lambda z + z^2$, $0 < |\lambda| < 1$ aus dem Ansatz $\phi(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{N} c_n z^n + O(z^{N+1})$.

(5) Seien P und Q Polynome mit $\mathcal{J}_P = \mathcal{J}_Q$. Zeigen Sie, dass P und Q dieselbe Böttcherfunktion bei ∞ haben. Hinweis: Greensche Funktion. Zeigen Sie, dass im Fall normierter Polynome (Leitkoeffizient 1) daraus $P \circ Q = Q \circ P$ folgt.

(6) Seien $\{z_1, \ldots, z_n\}$ ein attraktiver n-Zykel der rationalen Funktion R und U_j die Fatoukomponente, die z_j enthält. Zeigen Sie, dass die U_j paarweise verschieden (also paarweise disjunkt) sind und mindestens ein U_j einen kritischen Punkt von R enthält.

(7) Das Polynom $P_{c_0}(z) = z^2 + c_0$ habe einen superattraktiven n-Zykel. Zeigen Sie, dass ein $\epsilon > 0$ existiert, so dass P_c einen attraktiven n-Zykel für alle c mit $0 < |c - c_0| < \epsilon$ hat.

(8) Zeigen Sie, dass die Böttcherfunktion von $P(z) = z^2 - z^3$ zum Fixpunkt 0 nicht im ganzen Attraktionsgebiet $A(0)$ existiert. Hinweis: Zeigen Sie $[0, 2/3] \subset A(0)$. Wieso hilft das?

  Machen Sie ein Computerexperiment für $P(z) = z^2 - cz^3$, c nahe 1.

(9) Sei R rational vom Grad $d \geq 2$ mit Fixpunkten $z_1, z_2, \ldots, z_{d+1} \in \mathbb{C}$ und zugehörigen Multiplikatoren $\lambda_1, \ldots, \lambda_{d+1}$, alle $\neq 1$. Finden Sie eine explizite Darstellung für R, besser für $1/(R(z) - z)$, und schliessen Sie damit auf $\sum\limits_{j=1}^{d+1} \frac{1}{1-\lambda_j} = 1$. Gilt dies auch noch im Fall $z_{d+1} = \infty$?

(10) Zur Berechnung von $\sqrt[n]{a}$, $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, kann man Newtoniteration $z_n = N(z_{n-1})$ auf die Funktion $R(z) = z^{-n} - a^{-1}$ anwenden. Bestimmen Sie N und beschreiben Sie die Fatoumenge von N. Gibt es ***freie*** kritische Punkte? Vergleichen Sie mit Aufgabe 17 aus Teil A.

(11) Ein Polynom vom Grad $d \geq 2$ heisse ***normiert***, wenn $P(z) = z^d + a_{d-2} z^{d-2} + \ldots + a_0$ ist. Zeigen Sie, dass jedes Polynom zu einem normierten Polynom konjugiert ist und untersuchen Sie, wie sich die Böttcherfunktion Φ bei dieser Konjugation ändert. Zeigen Sie weiter für ein normiertes Polynom P

$$P(z) = \Phi(z)^d + O(|z|^{-d})$$

bei ∞. Wie kann man damit praktisch P aus Φ berechnen? Wie sieht die Formel für nicht normierte Polynome aus? Berechnen Sie umgekehrt (etwa mit maple) die ersten fünf Terme der Laurententwichklung von Φ um $z = \infty$ für $P(z) = z^2 + i$ (es sollte sich $\Phi(z) = z + \frac{i}{2} z^{-1} + (\frac{1}{8} + \frac{i}{4}) z^{-3} + (\frac{3}{8} - \frac{i}{16}) z^{-5} + O(|z|^{-7})$ ergeben).

Teil B III

(1) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{C}$, für die $P_a = z - z^2 + az^3 - \frac{a^2}{2} z^4$ einen endlichen attraktiven Fixpunkt hat. Versuchen Sie die Fatoumenge von P_a zu beschreiben, und vergleichen Sie mit Computerexperimenten.

(2) Zeigen Sie, dass $R(z) = \dfrac{z^2 - z}{z+1}$ eine einblättrige Leaublume $L(\infty)$ um $z = \infty$ und eine zweiblättrige Leaublume $L^+(0) \cup L^-(0)$ um $z = 0$ hat, und weiter: $L(\infty)$ ist vollständig invariant und enthält die Halbebene $\{z : \text{Re } z < -1\}$. Die Juliamenge ist zusammenhängend. Es ist $(0,1) \subseteq L^+(0), (1-\sqrt{2}, 0) \subseteq L^-(0)$ und R ist eine $2:1$-Abbildung $L^+(0) \to L^-(0)$ und eine $1:1$-Abbildung $L^-(0) \to L^+(0)$. Erstellen Sie eine Computergraphik, etwa im Fenster $-1.5 \le x \le 4.5, -2.25 \le y \le 2.25$ (Verhältnis 4:3).

(3) Wieviele Blätter hat die Leaublume von $P(z) = iz - z^4$ um $z = 0$ mindestens? Wie lautet eine Antwort für $P(z) = \lambda z + z^{p+1}$, wobei $\lambda = e^{2\pi i/q}$ und $p, q \in \mathbb{N}$ teilerfremd?

(4) $P(z) = z - z^4$ hat um $z = 0$ eine Leaublume mit drei Blättern. Zeigen Sie, dass $P_t(z) = t + P(z)$ $t \neq 0$, $|t|$ klein, nahe $z = 0$ genau zwei attraktive und zwei abstossende Fixpunkte hat. Wie sieht ein analoges Ergebnis für beliebige rationale Funktionen R aus, nahe $z = 0$ durch $R(z) = z - z^{s+1} + \cdots$ gegeben? Unterscheiden Sie die Fälle s ungerade/gerade.

(5) Bestimmen Sie bis auf Konjugation alle Grad-3-Polynome mit genau einem Leaublatt und genau einem Schrödergebiet mit gegebenem Multiplikator λ. Erstellen Sie eine Computergraphik.

(6) Bestimmen Sie ein Polynom P mit einer dreiblättrigen Leaublume um $z = 0$ (Multiplikator 1) und Fixpunkten in 1 und -1 mit vorgegebenen Multiplikatoren λ und μ. Überlegen Sie zuerst, welchen Grad P mindestens haben muss (kritische Punkte). Kommt man mit dem Minimalgrad aus? Was passiert, wenn man bei $z = 0$ den Multiplikator $e^{2\pi i/3}$ wählt?

(7) Sei $f(z) = z + az^3 + a_1 z^4 + \ldots, a \neq 0$, holomorph nahe $z = 0$. Zeigen Sie: Für ein geeignetes Polynom $Q(z) = z + cz^2$ gilt $f(Q(z)) = Q(\tilde{f}(z))$ mit $\tilde{f}(z) = z + az^3 + bz^5 + \ldots$ Allgemeiner: Für $f(z) = z + az^{m+1} + a_1 z^{m+2} + \ldots, (a \neq 0)$, kann man durch mehrfache Anwendung einer derartigen Konjugation ein Polynom $Q(z) = z + \ldots$ finden mit $f(Q(z)) = Q(\tilde{f}(z))$ und $\tilde{f}(z) = z + az^{m+1} + bz^{2m+1} + \ldots$ Berechnen Sie $\operatorname*{Res}_{z=0} 1/(z - f_1(z))$. Hinweis: Ist genauer der Zustand $f_r(z) = z + az^{m+1} + a_r z^{m+r} + \ldots$ mit $a_r \neq 0$ und $2 \le r \le m$ erreicht, so kann man mit geeignetem $Q_r(z) = 1 + cz^r$ zu $f_{r+1}(z) = Q_r^{-1} \circ f_r \circ Q_r(z) = z + az^{m+1} + a_{r+1} z^{m+r+1} + \ldots$ gelangen.

(8) Sei $R(z) = z + 1/z + c,\ c \in \mathbb{C},\ \text{Re } c \ge 0$, mit parabolischem Fixpunkt $z = \infty$. Zeigen Sie: Die Halbebenen Re $(\bar{c}z) > 1$ und Re $z > 1$ sind unter R invariant. Bestimmen Sie ein (alle) c so, dass R einen attraktiven Fixpunkt besitzt. Erstellen Sie für ein derartiges c eine Computergraphik in einem geeigneten Ausschnitt der z-Ebene.

(9) Konstruieren Sie eine rationale Funktion mit einem superattraktiven, einem attraktiven und einem parabolischen Punkt mit vierblättriger Leaublume. Visualisieren Sie auch die Attraktionsgebiete.

(10) Sei R eine rationale Funktion und $z \in \hat{\mathbb{C}}$ beliebig. Zeigen Sie, dass die Folge der Iterierten von z nicht gegen einen abstossenden Fixpunkt konvergieren kann, es sei denn, die Folge ist ab einem Index konstant.

(11) Sei R eine rationale Funktion, z_0 ein Punkt aus der Juliamenge von R und D eine beliebige Umgebung von z_0. Zeigen Sie, dass es für jeden attraktiven oder parabolischen Fixpunkt w von R Punkte in D gibt, deren Iterierte gegen w konvergieren.

(12) Computerexperiment: Lassen Sie für viele (100) zufällig ausgewählte Werte von $\alpha \in [0,1]$ den Vorwärtsorbit unter $P_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z + z^2 = \lambda z + z^2$ des endlichen kritischen Punktes $z = -\lambda/2$ zeichnen (10000-50000 Iterationen sollten ausreichen). Wie ist das Ergebnis zu interpretieren?

Teil B IV

(1) Sei $R(z) = \lambda z + a_2 z^2 + \ldots$ rational, $|\lambda| = 1$ und $0 \in \mathcal{F}$. Zeigen Sie:
  a) Die Folge (R^n) ist gleichmässig beschränkt in einer Kreisscheibe $|z| < r$.
  b) Die Folge $(\Phi_n), \Phi_n(z) = \dfrac{1}{n} \displaystyle\sum_{\nu=0}^{n-1} R^\nu(z)/\lambda^\nu$, ist normal in $|z| < r$, und normiert: $\Phi_n(0) = 0, \Phi_n'(0) = 1$.

c) Gilt $\Phi_{n_k} \to \Phi$, lokal gleichmässig in $|z| < r$, so ist $\Phi(R(z)) = \lambda\Phi(z)$.
d) Die Gesamtfolge (Φ_n) konvergiert lokal gleichmässig in $|z| < r$.

(2) Zeigen Sie: Besitzt $t \in (0,1)\backslash\mathbb{Q}$ eine periodische Kettenbruchentwicklung, so ist t quadratisch irrational: $c_0 + c_1 + c_2 t^2 = 0$ mit geeigneten $c_0, c_1, c_2 \in \mathbb{Z}, c_2 \neq 0$. Hinweis: Leiten Sie eine Gleichung $t = M(t)$ her, wobei M eine Möbiustransformation mit Koeffizienten in $\mathbb{N}$ ist. Berechnen Sie den Kettenbruch $[1, 2, 7, 1, 2, 7, 1, 2, 7, \ldots]$.

(3) Bestimmen Sie jeweils eine rationale Funktion R vom Grad 2 mit einer der folgenden kritischen Orbitrelationen:
i) $1 \Rightarrow i \to 0 \to \infty \leftrightarrows \infty \leftarrow 0 \leftarrow -i \Leftarrow -1$
ii) $2 \Rightarrow 0 \Rightarrow \infty \to 1 \leftrightarrows 1$
Dabei bedeutet $a \to b : R(a) = b$ einfach, $a \Rightarrow b : R(a) = b$ doppelt, und $a \leftrightarrows a : R(a) = a$ einfach. Können Sie die Fatoumenge beschreiben? Wie lautet die Schrödersche Funktionalgleichung zum Fixpunkt $z = \infty$ im Fall (i) und $z = 1$ im Fall (ii)?

(4) Bestimmen Sie alle $a \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$, so dass $R_a(z) = 1 + \dfrac{a}{z^2}$ einen attraktiven Fixpunkt hat. Kommen auch superattraktive Fixpunkte vor? Finden Sie alle a, so dass R_a einen superattraktiven Zyklus der Länge ≤ 4 hat. Finden Sie ein a mit $\mathcal{J}_a = \widehat{\mathbb{C}}$.

Computerexperiment dazu: Versuchen Sie, sich ein Bild der Menge derjenigen $a \in \mathbb{C}$ zu machen, für die $R_a(z)$ einen attraktiven Zykel kleiner Periode $p \le p_{\max}$ hat ($p_{\max} = 10$ reicht). Wählen Sie dafür einen Ausschnitt der a-Ebene (z.B. $|\mathrm{Re}\ a| \le 8$, $|\Im\, a| \le 6$) und berechnen Sie jeweils $z(a) = R_a^N(1)$ (für ein festes N im Bereich $100 \le N \le 500$; Voriteration). Berechnen Sie nun $z_p = R_a^p(z(a))$ für $p = 1, \ldots, p_{\max}$ und überprüfen Sie in jedem Schritt, ob $|z_p - z(a)| < \varepsilon$ ist mit geeignet gewähltem $\varepsilon > 0$. Betrachten Sie dieses als Indikator dafür, dass $z(a)$ zu einem attraktiven Zykel von R_a der Länge p gehört, und färben Sie den Punkt in der a-Ebene entsprechend ein. Warum funktioniert dieser Algorithmus? Warum nimmt man gerade den Punkt 1 zur Voriteration? Können Sie ihn noch verbessern?

(5) Berechnen Sie die kritischen Punkte von $B_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha} z^2 \, \frac{z-3}{1-3z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$. Bestimmen Sie α so, dass B_α einen superattraktiven Fixpunkt bzw. einen superattraktiven 2-Zykel in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ hat. Machen Sie ein Computerexperiment für die entsprechenden Parameter.

(6) (Man vgl. Aufgabe 12 aus B III) Berechnen Sie die kritischen Punkte $c_{1,2} \neq 0, \infty$ von $B_\alpha(z) = e^{2\pi i\alpha}\, z^2\, \dfrac{z-4}{1-4z}$, $\alpha \in \mathbb{R}$, und führen Sie folgendes Computerexperiment durch: Zeichnen Sie die Vorwärtsorbits (10-50000 Iterationen) der kritischen Punkte $c_{1,2}$ für zufällig gewählte Werte von $\alpha \in [0,1]$. Versuchen Sie, die Ergebnisse zu interpretieren.

Teil C/D

(1) Es sei U ein Fixgebiet von R und es gelte $R^{n_k} \to a$ lokal gleichmässig in U. Zeigen Sie $R(a) = a$. Hinweis: $R^{n_k+1} = R \circ R^{n_k} = R^{n_k} \circ R$.

(2) (fortgesetzt) Zeigen Sie: Sind ***alle*** lokal gleichmässigen Grenzfunktionen $\lim\limits_{k\to\infty} R^{m_k}(z)$ von $(R^n|_U)$ konstant, so gilt $R^n \to a = R(a) \in \overline{U}$, lokal gleichmässig in U. Hinweis: Betrachten Sie für festes $z_0 \in U$, a und (n_k) wie in der vorigen Aufgabe sowie $\delta > 0$ die Menge $I = \{n \in \mathbb{N} : |R^n(z_0) - a| < \delta\}$. Kann $\mathbb{N} \setminus I$ für alle $\delta > 0$ unendlich sein? Zur Erinnerung: Es gibt nur endlich viele Fixpunkte.

Zeigen Sie für den Multiplikator λ des Fixpunktes a: $|\lambda| < 1$ falls $a \in U$ und $|\lambda| = 1$ falls $a \in \partial U$.

(3) Es sei U ein Fixgebiet von R, es gelte für ***eine*** Teilfolge: $R^{n_k} \to \phi \not\equiv const$, lokal gleichmässig in U. Zeigen Sie, dass jede lokal gleichmässig konvergente Teilfolge von $(R^{n_{k+1}-n_k})$ gegen die identische Abbildung $\mathrm{id}(z) = z$ konvergiert. Hinweis: Mit $m_k = n_{k+1} - n_k$ ist $R^{n_{k+1}} = R^{n_k} \circ R^{m_k} = R^{m_k} \circ R^{n_k}$.

(4) (fortgesetzt) Folgern Sie, dass $f : U \to U$ eine konforme Selbstabbildung ist, und U zu $\mathbb{D}$ oder einem Kreisring $\mathfrak{A}_r = \{w : r < |w| < 1\}$, $0 < r < 1$, konform äquivalent ist. Ist damit U eine Siegelscheibe oder ein Arnol'd-Herman-Ring?

(5) Zeigen Sie: Die in Teil A I erwähnte Gruppe Σ lässt die Funktion von Morosawa invariant. Welche Konsequenz hat dies für die Juliamenge? Versuchen Sie eine Beschreibung der Fatoumenge.

(6) Es sei P ein Polynom vom Grad d mit m endlichen nicht-abstossenden periodischen Zykeln α_j (Länge p_j, Multiplikator λ_j, $|\lambda_j| \le 1$). Q bezeichnet ein (Interpolations-) Polynom (von hohem Grad) mit $Q(z) = 0$ und $Q'(z) = P'(z)$ auf $\bigcup_{j=1}^m \alpha_j$. $r > 0$ sei so gewählt, dass $|P(z)| \ge 2|z|$ für $|z| \ge r$, insbesondere $\bigcup_{j=1}^m \alpha_j \subset \mathbb{D}_r = \{z : |z| < r\}$ gilt. Zeigen Sie:

a) Für $0 < \epsilon < 1$ hat $P_\epsilon = P - \epsilon Q$ die (super)- attraktiven Zykel α_j mit zugehörigen Gebietszykeln $(U_j^\nu(\epsilon))_{\nu=1}^{p_j}$.

b) Für hinreichend kleines $\epsilon > 0$ hat $P_\epsilon(z) = w$, $w \in \mathbb{D}_r$, genau d Lösungen in $\mathbb{D}_r$. Anders gesagt: $P_\epsilon^{-1}(\mathbb{D}_r)$ besteht aus s einfach zusammenhängenden Komponenten $D_\sigma \subset \mathbb{D}_r$ (und weiteren in $|z| > r$), $P_\epsilon : D_\sigma \to \mathbb{D}_r$ hat den Grad d_σ mit $\sum_{\sigma=1}^{s} d_\sigma = d$. Hinweis: Satz von Rouché.

c) Es gilt $U_j^\nu(\epsilon) \subset D_{\sigma(j,\nu)}$, wenn ϵ so klein wie in b) ist. Hinweis: Ausschöpfung von $\bigcup_{\nu=1}^{p_j} U_j^\nu(\epsilon)$.

d) $m \le d - s$ (Satz von Douady-Hubbard, Beweis nach Bergweiler).

(7) Einfaches Computerexperiment für $R(z) = z^m + c/z^k$. Das z_0 entsprechende Pixel erhält die Farbe n mod N, wenn $n \le N$ der kleinste Index mit $|R^n(z_0)| > 2$ ist, und die Farbe $N + 1$, falls $|R^n(z_0)| \le 2$ für $0 \le n \le N$ bleibt. Variieren Sie $m \in \{2, 3\}$, $k \in \{1, 2, 3\}$ und $c \in [10^{-6}, 1]$.

(8) Das Beispiel von McMullen $R(z) = z^2 + \epsilon/z^3$, $\epsilon > 0$. Es bezeichnet U_a das stabile Gebiet, das a enthält, und $\Delta_\epsilon = \{z : |z| > 1 + \epsilon\}$. Zeigen bzw. berechnen Sie

a) die Nullstellen z_j, $1 \le j \le 5$, und die fünf freien kritischen Punkte c_j (neben $0, 0, \infty$).

b) $\mathcal{J}$, $\mathcal{F}$, U_∞ und U_0 sind symmetrisch zu $\mathbb{R}$ und invariant unter Drehung um 72° (Multiplikation mit $\omega = e^{2\pi i/5}$).

c) Ein stabiles Gebiet U ist entweder invariant unter der Drehung um 72°, oder aber die Gebiete $\omega^j U$, $0 \le j \le 4$, sind verschieden.

d) Δ_ϵ ist vorwärts invariant, es ist sogar $R(\overline{\Delta_\epsilon}) \subset \Delta_\epsilon$, also $\Delta_\epsilon \subset U_\infty$.

(9) (fortgesetzt) Zeigen Sie für hinreichend kleines $\epsilon > 0$:

e) U_0 enthält $D_\epsilon = \{z : |z| < \frac{1}{2}\epsilon^{1/3}\}$. Hinweis: Zeigen Sie $R(\overline{D_\epsilon}) \subset \Delta_\epsilon$.

f) Es ist $|R(z)| \le 3\epsilon^{2/5}$ in $A = \{z : \epsilon \le |z|^5 \le \frac{3}{2}\epsilon\}$. Was bedeutet das in Kombination mit e) für das stabile Gebiet $\mathcal{R}$, das A enthält?

g) Die Gleichung $R(z) = 1$ hat ein Lösungspaar $z_{1,2}$ nahe ± 1 und ein Lösungstripel $z_{3,4,5}$ in der Nähe der dritten Wurzeln von ϵ; das Paar wird vom Tripel durch A getrennt. Hinweis: Betrachten Sie (für $\epsilon \to 0$) $z^2 = 1 - \epsilon/z^3$ bzw. $z^3 = \epsilon + z^5$, also $\zeta^3 = 1 + \epsilon^{2/3}\zeta^5$ nach der Transformation $z = \epsilon^{1/3}\zeta$.

h) Der Kreisring $\mathfrak{A} = \{z : \frac{1}{2}\epsilon^{1/3} < |z| < 1 + \epsilon\}$ ist rückwärts invariant und enthält damit $\mathcal{J}$. Folgern Sie hieraus $U_0 \ne U_\infty$.

i) Zeigen Sie: $\mathfrak{A}$ hat zwei Urbildgebiete $\mathfrak{A}_2$ (enthält Punkte nahe $z = 1$) und $\mathfrak{A}_3$ (enthält Punkte nahe $z = \epsilon^{1/3}$). Sie werden durch $\mathcal{R}$ getrennt, und es ist $R : \mathfrak{A}_j \longrightarrow \mathfrak{A}$ vom Grad j.

j) Es gilt $U_0 \ne U_\infty$ und $\#U_0 = \#U_\infty = 1$. Hinweis: Betrachten Sie die Ausschöpfung (G_n) von U_∞: G_n ist die Komponente von $R^{-n}(\Delta_\epsilon)$, die ∞ enthält. Verfolgen Sie die Zahl der kritischen Punkte in G_n mittels der Riemann-Hurwitz-Formel unter Beachtung der Symmetrie von G_n.

k) $R : \mathcal{R} \to U_0$ ist eine $5 : 1$, $R : U_0 \to U_\infty$ eine $3 : 1$ und $R : U_\infty \to U_\infty$ eine $2 : 1$ Abbildung. Das Gebiet $\mathcal{R}$ und alle seine Vorgänger sind Ringgebiete. Hinweis: Riemann-Hurwitz-Formel.

l) $\mathcal{J} = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} R^{-n}(\mathfrak{A})$ besteht aus überabzählbar vielen geschlossenen Jordankurven um $z = 0$.

(10) Die Polynomfolge (Q_n), $Q_0(c) = c$, $Q_{n+1}(c) = Q_n(c)^2 + c$ ist keine Iterationsfolge, vielmehr ist $Q_n(c) = P_c^n(c)$, $P_c(z) = z^2 + c$.

a) Zeigen Sie: $Q_n(c) \to \infty$ genau dann, wenn die Juliamenge $\mathcal{J}_c$ von P_c zusammenhängend ist; und genau dann, wenn $\sup\{|Q_n(c)| : n \in \mathbb{N}\} \le 2$ ist.
b) Die Menge $\mathcal{M} = \{c : \mathcal{J}_c$ zusammenhängend $\}$ heisst ***Mandelbrotmenge.*** Zeigen Sie: $\mathcal{M}$ ist kompakt und es ist (i) $\{c : |1 - \sqrt{1-4c}| \le 1\} \subset \mathcal{M}$ (wobei $\operatorname{Re}\sqrt{1-4c} \ge 0$), (ii) $\{c : |c+1| \le 1/4\} \subset \mathcal{M}$ und (iii) $[-2, 1/4] \subset \mathcal{M}$. Hinweis zu (iii): Es ist nach (i), (ii) die reelle Folge $(Q_n(c))$ für $-2 \le c \le -5/4$ zu untersuchen.
c) Zeigen Sie, dass $\Omega = \hat{\mathbb{C}} \setminus \mathcal{M}$ ein Gebiet ist. Hinweis: Maximumprinzip.
d) Zeigen Sie, dass $\Omega_n = \{c : |Q_n(c)| > 3\}$ ein Gebiet und $g_n(c) = 2^{-n} \log |Q_n(c)|$ seine Greensche Funktion mit Pol in $c = \infty$ ist.
e) Zeigen Sie, dass die Folge (Ω_n) eine reguläre Ausschöpfung von Ω, und $g(c) = \lim\limits_{n\to\infty} 2^{-n} \log |Q_n(c)|$ die Greensche Funktion $g(c, \infty, \Omega)$ ist.

(11) Computerexperiment: Im Fenster $-2.6 < x < 1, -1.35 < y < 1.35$ soll $\mathcal{M}$ in Schwarz dargestellt werden: Ein Pixel p entsprechend dem Parameterwert c erhält die Farbe $1 + (n \bmod 15)$, wenn $n \le N$ (etwa $N = 100$) der kleinste Index mit $|Q_n(c)| > S$ (jedes $S \ge 2$ zugelassen) ist, und die Farbe Schwarz ($= 0$) sonst, d.h., wenn $|Q_n(c)| \le S$ für $n \le N$ gilt.

(12) $P_c(z) = z^2 + c$ habe für $c = c_0$ einen (super)- attraktiven m-Zyklus

$$\alpha_c = \{z_c, P_c(z_c), \ldots, P_c^{m-1}(z_c)\}.$$

Zeigen Sie: Es gibt ein Gebiet $C \subset \mathcal{M}$, so dass P_c für alle $c \in C$ einen (super)- attraktiven m-Zyklus α_c besitzt. Die Multiplikatorabbildung $C \to \mathbb{D}$, $c \mapsto \lambda(c) = \lambda(\alpha_c)$, ist eigentlich. Sie ist analytisch fortsetzbar nach

$$\mathbb{C} \setminus \{c : P_c \text{ hat einen Zyklus mit Multiplikator } \lambda(c) = 1\}.$$

Hinweis: Betrachten Sie die Gleichung $P_c^m(z) - z = 0$ mit Startwert $z = z_{c_0}$ und Lösung $z = z_c$ (Satz über implizite Funktionen), sowie $\lambda(c) = \frac{d}{dz} P_c^m(z)|_{z=z(c)}$.

(13) Computerexperiment zur Visualisierung hyperbolischer Komponenten: c wird N-mal voriteriert, d.h., es wird $z_0(c) = P_c^N(c)$ berechnet (etwa $N = 100$, aber nur solange $|P_c^n(c)| < 2$, $1 \le n \le N$, bleibt). Ist m (etwa $1 \le m \le 5$ bis 10) die kleinste Zahl mit $|z_0(c) - P_c^m(z_0(c))| < \epsilon$, so hat P_c vermutlich einen attraktiven m-Zyklus, und das c entsprechende Pixel erhält die Farbe m.

(14) Es sei P ein Polynom vom Grad $d \ge 2$ mit den Eigenschaften: (i) $P'(c) = 0$ impliziert $P(c) = \pm 1$ und $P''(c) \ne 0$, (ii) $P'(\pm 1) \ne 0$ sowie (iii) $P(\{-1, 1\}) \subset \{-1, 1\}$. Zeigen Sie $(z^2 - 1)P'(z)^2 = d^2(P(z)^2 - 1)$ und damit

$$(z^2 - 1)P''(z) + zP'(z) - d^2 P(z) = 0.$$

Berechnen Sie P mit $P(1) = 1$ für $d = 2, 3, 4$. Welche bekannten Polynome erhält man allgemein? Kann man $\mathcal{J}_P$ explizit angeben?

(15) Bestimmen Sie alle Grad-2 rationalen Funktionen R mit folgenden Eigenschaften: 1 ist abstossender, ∞ ist attraktiver Fixpunkt; $c \ne 0, \pm 1$ ist kritischer Punkt, der folgendermassen abgebildet wird: $c \mapsto -1 \mapsto 1$. Zeigen Sie, dass $\mathcal{F} = A_\infty$ einfach zusammenhängend ist; anscheinend (und wirklich) ist $\mathcal{J}$ ein Jordanbogen von -1 nach 1.

Computerexperiment: Zeichnen Sie den Rückwärtsorbit $O_N^-(\{c\}) = \bigcup_{n=0}^N R^{-n}(\{c\})$ (N im Bereich $10 - 20$; es wird eine rekursive Prozedur benötigt). Unterscheiden sie farblich Regionen, in denen viele bzw. wenige Punkte von $O_N^-(\{c\})$ liegen.

(16) Es sei R hyperbolisch vom Grad $d > 1$, o.B.d.A. $\infty \in \mathcal{J}$. Zeigen Sie:
a) Zu $a \in \mathcal{J}$ gibt es eine Kreisscheibe $D(a) = \{z : |z-a| < r(a)\}$, in der alle Umkehrfunktionen R_j^{-n}, $1 \le j \le d^n$, von R^n existieren.
b) Die Familie der Funktionen $R_j^{-n}|_{D(a)}$ ist normal.
c) Für $a \in \mathcal{J}$ werde $z_j^{(n)}(a) = R_j^{-n}(a)$ gesetzt. Dann gibt es zu $\epsilon > 0$ ein N mit $\mathcal{J} \subset \bigcup_{j=1}^{d^n} \{z : |z - z_j^{(n)}(a)| < \epsilon\}$ für $n \ge N$.

(17) (fortgesetzt) Es sei μ_n^a das relative ***Zählmaß*** $\mu_n^a(E) = d^{-n} \operatorname{card} \big(R^{-n}(\{a\}) \cap E\big)$, und $\mathcal{C}(\mathcal{J})$ bezeichne den Raum der stetigen Funktionen $\phi : \mathcal{J} \to \mathbb{R}$ mit der Maximumnorm

$\|\phi\| = \max\{|\phi(z)| : z \in \mathcal{J}\}$. Zeigen Sie, dass durch

$$(T\phi)(a) = d^{-1} \sum_{j=1}^{d} \phi(z_j^{(n)}(a)) = \int_{\mathcal{J}} \phi(\zeta)\, d\mu_1^a(\zeta)$$

ein stetiger linearer Operator $T : \mathcal{C} \to \mathcal{C}$ der Norm $\|T\| = 1$ mit den folgenden Eigenschaften definiert wird (ϕ ist fest):

a) Die Folge $(T^n\phi)$ ist gleichgradig stetig. Hinweis: b) in der Aufgabe vorher.
b) Es gilt $\|T^m\phi\| \leq \|\phi\|$, und Gleichheit nur, wenn für geeignetes $a = a_m \in \mathcal{J}$ gilt $\phi(z_j^{(m)}(a)) = \lambda_m\|\phi\|$, wobei $\lambda_m = \pm 1$ von j unabhängig ist.
c) Gilt $\|T^n\phi\| = \|\phi\|$ für alle n, so ist ϕ konstant. Hinweis: c) in der Aufgabe vorher.
d) Aus $T^{n_k}\phi \to \psi$ und $T^{m_k}\psi \to \chi$ (mit $m_k = n_{k+1} - n_k$) folgt $\chi = \psi$.
e) Die Funktion ψ aus d) ist konstant $= l_\phi$ und es gilt $T^m\phi \to l_\phi$.
f) Die Abbildung $l : \mathcal{C} \to \mathbb{C}$, $\phi \mapsto l_\phi = l(\phi)$ ist ein stetiges lineares Funktional auf $\mathcal{C}$ der Norm $\|l\| = 1$.

Endergebnis: Nach dem ***Rieszschen Darstellungssatz*** gibt es ein Wahrscheinlichkeitsmaß μ mit $l_\phi = \int_{\mathcal{J}} \phi(\zeta)\, d\mu(\zeta)$. Wegen $(T^n\phi)(a) = \int_{\mathcal{J}} \phi(\zeta)\, d\mu_n^a(\zeta)$ ist also $\mu_n^a \rightharpoonup \mu$ (schwache Konvergenz) bewiesen; μ ist unabhängig von a, bezüglich μ sind die Urbilder $z_j^{(n)}(a)$, $a \in \mathcal{J}$ beliebig, asymptotisch ***gleichverteilt***.

Im Fall eines Polynoms $P(z) = c_0 + \cdots + c_{d-1}z^{d-1} + z^d$ heisst μ ***Equilibrium-*** oder ***Gleichgewichtsmass***, es gilt $g(z, \infty, A_\infty) = \int_{\mathcal{J}} \log|z - \zeta|\, d\mu(\zeta)$. Für $P(z) = z^2 - 2$ ist $g(z, [-2, 2], \mathbb{C} \setminus [-2, 2]) = \displaystyle\int_{-2}^{2} \frac{\log|z - \xi|}{2\pi\sqrt{4 - \xi^2}}\, d\xi$.