

Gewöhnliche Differentialgleichungen
Sommersemester 2001 — Universität Dortmund
Prof. Dr. N. Steinmetz

Dieses Skript beschreibt in Kurzform wesentliche Teile der Vorlesung. Es ist weder vollständig noch kann es den Besuch der Vorlesung ersetzen, erst recht nicht die unabdingbare selbständige Bearbeitung der Übungsaufgaben. Beweise und Beispiele fehlen vollständig.

Literatur (weitere bei Bedarf):

Amann, Gewöhnliche Differentialgleichungen, deGruyter 1983

Aulbach, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Spektrum HTB 1997

Hartman, Ordinary Differential Equations, Wiley 1964 Birkhäuser 1982

Walter, Gewöhnliche Differentialgleichungen, Springer-Lehrbuch 2000

1. $x' = f(t, x)$ ist eine DGL 1. Ordnung. Dabei ist $f : G \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, die *rechte Seite*, in einer offenen Menge $G \subset \mathbb{R}^2$ stetig, t ist die unabhängige Variable (die Zeit), und $x = x(t)$ ist die gesuchte *Lösung*, dh. eine stetig differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x'(t) \equiv f(t, x(t))$ im Intervall I . Wird eine Lösung mit $x(\tau) = \xi$ gesucht, wobei $(\tau, \xi) \in G$ gegeben ist, so spricht man vom *Anfangswertproblem* (AWP).

Typische G : *Streifen* $G = (a, b) \times \mathbb{R}$ bzw. *Rechteck* $G = (a, b) \times (c, d)$.

Ist $f \in C^m(G)$, so ist $x \in C^{m+1}(I)$, und es ist $x \in C^\infty(I)$ falls $f \in C^\infty(G)$. Das AWP ist äquivalent zur *Integralgleichung* (IGL) $x(t) = \xi + \int_\tau^t f(s, x(s)) ds$.

2. Visualisiert man die Abbildung $f : G \rightarrow \mathbb{R}$ so, daß man durch ausgewählte Punkte $(t, x) \in G$ eine kurze Strecke mit der Steigung $f(t, x)$ zeichnet, so entsteht das *Richtungsfeld*. Eine Lösung der DGL muß definitionsgemäß *auf das Richtungsfeld passen*. *Isoklinen* nennt man die Kurven konstanter Steigung im Richtungsfeld: $f(t, x) = \text{const.}$
3. Behandelt werden explizite Lösungsmethoden für folgende Typen (die auftretenden Funktionen f, g, h sind stetig):

(a) *Linear homogene DGL* $x' = f(t)x$.

(b) *Linear inhomogene DGL* $x' = f(t)x + g(t)$, $g(t) \not\equiv 0$.

(c) *Bernoulli-DGL* $x' = f(t)x + g(t)x^\alpha$, $g(t) \not\equiv 0, \alpha \neq 0, 1$.

(d) *Riccati-DGL* $x' = f(t) + g(t)x + h(t)x^2$.

(e) DGL mit *getrennten Veränderlichen* $x' = f(t)g(x)$.

(f) *Euler-homogene DGL* $x' = f(x/t)$.

(g) $x' = f\left(\frac{ax + bt + c}{\alpha x + \beta t + \gamma}\right)$.

4. $x^{(N)} = g(t, x, x', \dots, x^{(N-1)})$ ist eine *DGL N-ter Ordnung*. Dabei ist *die rechte Seite* $g : G \rightarrow \mathbb{R}$ stetig in der offenen Menge $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. Eine *Lösung* im Intervall I ist eine N -mal stetig differenzierbare Funktion $x : I \rightarrow \mathbb{R}$ mit $x^{(N)}(t) \equiv g(t, x(t), x'(t), \dots, x^{(N-1)}(t))$ in I . Beim *Anfangswertproblem* (AWP) werden noch

$x(\tau) = \xi_0, x'(\tau) = \xi_1, \dots, x^{(N-1)}(\tau) = \xi_{N-1}$ vorgeschrieben. Äquivalent ist die Integralgleichung (IGL)

$$x(t) = \xi_0 + \dots + \xi_{N-1}(t - \tau)^{N-1} + \int_{\tau}^t \frac{(t-s)^{N-1}}{(N-1)!} g(s, x(s), \dots, x^{(N-1)}(s)) ds.$$

5. Setzt man $y_1 = x, y_2 = x', \dots, y_N = x^{(N-1)}$, so gilt
- $$\begin{cases} y_1' = y_2 \\ y_2' = y_3 \\ \vdots \\ y_{N-1}' = y_N \\ y_N' = g(t, y_1, y_2, \dots, y_N) \end{cases}$$
- und umgekehrt: Mit $x = y_1$ gelten $x' = y_2, x'' = y_3, \dots, x^{(N-1)} = y_N$ und schließlich

$$x^{(N)} = g(t, x, x', \dots, x^{(N-1)}).$$

6. Ein DGLsystem 1. Ordnung $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$ sieht aus wie eine DGL 1. Ordnung. Jetzt

aber ist $\mathbf{x} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_N \end{pmatrix}$ und $\mathbf{f} = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \\ \vdots \\ f_N \end{pmatrix}$; $f_\nu : G \rightarrow \mathbb{R}$, also $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^N$, sind

(mindestens) stetig und $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ ist offen.

7. Eine Lösung $\mathbf{x} : I \rightarrow \mathbb{R}^n$ ist stetig differenzierbar mit $\mathbf{x}'(t) \equiv \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t))$ in I . Beim Anfangswertproblem (AWP) wird wieder $\mathbf{x}(\tau) = \xi, (\tau, \xi) \in G$, vorgeschrieben. Ausgeschrieben lautet das Ganze:

$$\begin{aligned} x_1' &= f_1(t, x_1, x_2, \dots, x_N), & x_1(\tau) &= \xi_1 \\ x_2' &= f_2(t, x_1, x_2, \dots, x_N), & x_2(\tau) &= \xi_2 \\ &\vdots & & \\ x_N' &= f_N(t, x_1, x_2, \dots, x_N), & x_N(\tau) &= \xi_N \end{aligned}$$

8. Äquivalent zum AWP ist die Integralgleichung (IGL) $\mathbf{x}(t) = \xi + \int_{\tau}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{x}(s)) ds$,
komponentenweise interpretiert: $x_\nu(t) = \xi_\nu + \int_{\tau}^t f_\nu(s, x_1(s), \dots, x_N(s)) ds$.

(a) Jede Lösung des AWP ist (stetig und) Lösung der IGL.

(b) Jede stetige Lösung der IGL ist stetig differenzierbar und Lösung des AWP.

9. Ein 2D-System der Form (*) $\begin{cases} x' = g(x, y) \\ y' = h(x, y) \end{cases}$ wobei $g, h : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $D \subset \mathbb{R}^2$ offen sind, heißt *ebenes autonomes System* (t tritt rechts nicht explizit auf). Das *Richtungsfeld* ist eine Visualisierung des Vektorfeldes $(g, h) : D \rightarrow \mathbb{R}^2$: In ausgewählten Punkten $(x, y) \in D$ wird ein kurzer Pfeil parallel zum Ortsvektor $(g(x, y), h(x, y))$ angetragen. Lösungen werden als Kurven in der xy -Ebene interpretiert. Diese *Trajektorien* passen auf das Richtungsfeld, d.i. ihr Tangentialfeld. Das *Phasenporträt* wird visualisiert durch das Einzeichnen einiger typischer Trajektorien.

10. Das System (*) heißt *hamiltonsch*, wenn eine C^2 -Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$ existiert mit $\text{grad } H = (-h, g)$. H heißt *Hamiltonfunktion* oder erstes Integral. Eine hinreichende Bedingung ist bekanntlich: D ist sternförmig und es gilt $-h_y = g_x$. H ist auf Trajektorien konstant.

Ein nicht-hamiltonsches System (*) kann man gegebenenfalls hamiltonsch machen mittels eines *Eulerschen Multiplikators* oder *integrierenden Faktors*. $m : D \rightarrow (0, \infty)$ ist stetig differenzierbar so zu bestimmen, daß (**)
$$\begin{cases} x' = m(x, y)g(x, y) \\ y' = m(x, y)h(x, y) \end{cases}$$
 hamiltonsch wird. Hinreichend ist: D ist sternförmig und es gilt $-(mh)_y = (mg)_x$. In jedem Fall haben (*) und (**) dasselbe Richtungsfeld und Phasenporträt.

11. In der Literatur findet man den Begriff der *exakten DGL* $p(x, y)dx + q(x, y)dy = 0$, wo $p, q : D \rightarrow \mathbb{R}$ stetig differenzierbar und $D \subset \mathbb{R}^2$ offen sind. Exakt bedeutet hier $(p, q) = \text{grad } H$ für eine C^2 -Funktion $H : D \rightarrow \mathbb{R}$. Der Zusammenhang mit dem hamiltonschen System
$$\begin{cases} x' = q(x, y) \\ y' = -p(x, y) \end{cases}$$
 sowie den DGLen 1. Ordnung $\frac{dy}{dx} = -\frac{p(x, y)}{q(x, y)}$ bzw. $\frac{dx}{dy} = -\frac{q(x, y)}{p(x, y)}$ wird untersucht.

12. Wiederholung aus der *Analysis II* zum \mathbb{R}^N .

- (a) $|\mathbf{x}|$ bezeichnet eine beliebige *Norm*, meist, aber nicht immer, die *Euklidnorm* $|\mathbf{x}| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_N^2}$.
- (b) $\mathbf{x} \cdot \mathbf{y} := x_1y_1 + \dots + x_Ny_N$ ist das euklidische *Skalarprodukt*.
- (c) $|\mathbf{x} \cdot \mathbf{y}| \leq |\mathbf{x}||\mathbf{y}|$ ist die *Cauchy-Schwarzsche Ungleichung* (hier Euklidnorm $|\mathbf{x}| = \sqrt{\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}}$).
- (d) Ist $A = (a_{\mu\nu})$ eine $M \times N$ -Matrix, so ist $\mathbf{x} \mapsto A\mathbf{x}$ eine lineare Abbildung $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}^M$. Es gibt ein $C > 0$ mit $|A\mathbf{x}| \leq C|\mathbf{x}|$ für alle $\mathbf{x} \in \mathbb{R}^N$, das kleinste derartige C ist die *Matrizennorm* $|A|$, sie hängt von den verwendeten Normen in \mathbb{R}^N bzw. \mathbb{R}^M ab.
- (e) Ist $\mathbf{f} : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig, so gilt für die Euklidnorm (jede Norm im \mathbb{R}^N)

$$\left| \int_a^b \mathbf{f}(t) dt \right| \leq \int_a^b |\mathbf{f}(t)| dt.$$

13. Sei $D \subset \mathbb{R}^N$ offen; $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^M$ heißt *lipschitzstetig*, wenn es ein $L > 0$ gibt mit $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in D$. \mathbf{f} heißt *lokal lipschitzstetig*, wenn es zu jedem $\xi \in G$ eine Kugel $K \subset G$ um ξ gibt, so daß $\mathbf{f} : K \rightarrow \mathbb{R}^M$ lipschitzstetig ist.

- (a) Ist \mathbf{f} lokal lipschitzstetig und $C \subset D$ kompakt, so existiert $L = L(C) > 0$ mit $|\mathbf{f}(\mathbf{x}) - \mathbf{f}(\mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ für alle $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in C$.
- (b) Lineare Abbildungen $\mathbf{f}(\mathbf{x}) = A\mathbf{x}$ sind trivialerweise lipschitzstetig mit $L = |A|$.
- (c) $\mathbf{f} \in C^1(D)$ ist lokal lipschitzstetig. Ist $K \subset D$ eine Kugel, so gibt es eine stetige $M \times N$ -Matrix $J(\mathbf{x}, \mathbf{y})$, $(\mathbf{x}, \mathbf{y}) \in K \times K$, mit $\mathbf{f}(\mathbf{y}) - \mathbf{f}(\mathbf{x}) = J(\mathbf{x}, \mathbf{y})(\mathbf{y} - \mathbf{x})$. Es ist $|J(\mathbf{x}, \mathbf{y})| \leq \sup_{\xi \in K} |\mathbf{f}'(\xi)|$.

(d) Sind $\mathbf{f} : D \rightarrow G \subset \mathbb{R}^M$ und $\mathbf{g} : G \rightarrow \mathbb{R}^K$ (lokal) lipschitzstetig, so ist auch die Komposition $\mathbf{g} \circ \mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^K$ (lokal) lipschitzstetig.

14. Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen, Variablenbezeichnung: $(t, \mathbf{x}) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$. $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ genügt in G einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. \mathbf{x} , wenn es zu jedem $(\tau, \xi) \in G$ eine offene Umgebung, zB.

$$Z = Z_{r,\rho}(\tau, \xi) = \{(t, \mathbf{x}) : |t - \tau| < r, |\mathbf{x} - \xi| < \rho\}$$

und ein $L > 0$ gibt mit $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{y})| \leq L|\mathbf{x} - \mathbf{y}|$ für alle $(t, \mathbf{x}), (t, \mathbf{y}) \in Z$.

Wichtiger Spezialfall: $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, A und \mathbf{b} stetig.

15. Die *Standardvoraussetzung* für $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(\tau) = \xi$:

(a) $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ ist offen.

(b) $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ ist stetig.

(c) \mathbf{f} genügt in G einer *lokalen Lipschitzbedingung* bzgl. \mathbf{x} . Hinreichend dafür ist

$$\mathbf{f} \in C^1(G) \text{ bzw., etwas schwächer, } \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(t, \mathbf{x}) \text{ stetig in } G.$$

16. Satz von Picard-Lindelöf: Unter der Standardvoraussetzung hat das AWP

$$\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \quad \mathbf{x}(\tau) = \xi,$$

genau eine lokale, dh. in einem Intervall $[\tau - \alpha, \tau + \alpha]$ um τ erklärte Lösung Φ . Man erhält Φ als Grenzwert der *Picard-Iterierten* (*sukzessive Approximationen*) Φ_n :

$$\Phi_0(t) = \xi, \quad \Phi_n(t) = \xi + \int_{\tau}^t \mathbf{f}(s, \Phi_{n-1}(s)) ds.$$

(a) Fehlerabschätzung: $|\Phi(t) - \Phi_n(t)| \leq \frac{ML^n}{(n+1)!} |t - \tau|^{n+1}$.

(b) Wählt man $r > 0, \rho > 0$ so, daß $Z = [\tau - r, \tau + r] \times \{\mathbf{x} : |\mathbf{x} - \xi| \leq \rho\} \subset G$ und $|\mathbf{f}| \leq M$ in Z ist, so kann man $\alpha = \min\{r, \rho/M\}$ setzen.

(c) Ist $\mathbf{f} \in C^m(G)$ bzw. $\mathbf{f} \in C^\infty(G)$, so ist die Lösung in $C^{m+1}(I)$ bzw. in $C^\infty(I)$.

(d) Ist \mathbf{f} um den Punkt (τ, ξ) in eine (mehrdimensionale) Potenzreihe entwickelbar, so gilt dasselbe für die Lösung Φ um den Punkt τ .

17. \mathbb{B} sei der *Banachraum* der stetigen Funktionen $\mathbf{u} : I = [\tau - \alpha, \tau + \alpha] \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit der *gewichteten* Maximumnorm $\|\mathbf{u}\|_\infty := \max\{|\mathbf{u}(t)| e^{-2L|t-\tau|} : t \in I\}$, und \mathbb{K} die abgeschlossene Menge $\{\mathbf{u} \in \mathbb{B} : |\mathbf{u}(t) - \xi| \leq \rho, |t - \tau| \leq \alpha\} \subset \mathbb{B}$. Dann ist $T : \mathbb{K} \rightarrow \mathbb{K}$, $(T\mathbf{u})(t) = \xi + \int_{\tau}^t \mathbf{f}(s, \mathbf{u}(s)) ds$, eine Kontraktion mit der Kontraktionskonstanten $1/2$; der einzige Fixpunkt (*Banachscher Fixpunktsatz*) von T ist dann die Lösung des AWP.

18. Die Lösung $\Phi : I \rightarrow \mathbb{R}^N$ des AWP $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, $\mathbf{x}(\tau) = \xi$, heißt *fortsetzbar*, wenn es eine Lösung $\Psi : J \rightarrow \mathbb{R}^N$ mit $J \supset I, J \neq I$, gibt; es ist dann $\Phi = \Psi$ auf I . Es gibt eine eindeutig bestimmte nicht-fortsetzbare Lösung Φ , *die maximale Lösung*. Ihr

Existenzintervall $I_{max} = I_{max}(\tau, \xi)$ heißt *maximales Existenzintervall* und ist *offen*, $I_{max} = (\alpha, \beta)$. Es gilt: Ist $K \subset G$ *kompakt*, so gibt es $\alpha < a < b < \beta$ mit

$$K \cap \text{graph } \Phi|_{(\alpha, a)} = K \cap \text{graph } \Phi|_{(b, \beta)} \cap K = \emptyset.$$

(Der Graph von Φ verläßt nach links und rechts jede kompakte Teilmenge von G ; die maximale Lösung verläuft von Rand zu Rand).

19. Im *Streifen* $G = (a, b) \times \mathbb{R}^N$ gilt:

(a) $\alpha = a$ oder $a < \alpha$ und $\lim_{t \rightarrow \alpha} |\mathbf{x}(t)| = +\infty$

(b) $\beta = b$ oder $\beta < b$ und $\lim_{t \rightarrow \beta} |\mathbf{x}(t)| = +\infty$

(c) Liegt lineares Wachstum vor, $|\mathbf{f}(t, \mathbf{x})| \leq A(t) + B(t)|\mathbf{x}|$ mit stetigen $A, B : (a, b) \rightarrow [0, \infty)$, so ist $I_{max} = (a, b)$, dh. man hat *globale Existenz*.

20. **Lemma von Gronwall:** $u : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ sei stetig und es gelte $u(t) \leq \alpha + \beta \int_0^t u(s) ds$ in $[0, a)$ mit $\alpha \in \mathbb{R}, \beta \geq 0$. Dann ist $u(t) \leq \alpha e^{\beta t}$.

21. $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ sei offen, Variablenbezeichnung: $(t, \mathbf{x}, \alpha) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$, und $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ sei stetig und genüge einer lokalen Lipschitzbedingung bzgl. \mathbf{x} . Das AWP $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}, \alpha), \mathbf{x}(\tau) = \xi$, besitzt die maximale Lösung $\Phi(t; \tau, \xi, \alpha)$ mit maximalem Existenzintervall $I_{max}(\tau, \xi, \alpha)$. Φ ist demnach definiert auf

$$\Omega = \{(t, \tau, \xi, \alpha) : (\tau, \xi, \alpha) \in G, t \in I_{max}(\tau, \xi, \alpha)\}.$$

Satz über stetige Abhängigkeit: Die Menge $\Omega \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N \times \mathbb{R}^M$ ist offen, und $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ sowie $\frac{\partial \Phi}{\partial t} : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$ sind stetig.

22. **Satz über differenzierbare Abhängigkeit:** Ist $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ sogar stetig differenzierbar, so auch $\Phi : \Omega \rightarrow \mathbb{R}^N$. Mit

$$J(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \mathbf{x}}(t, \Phi(t; \tau, \xi, \alpha), \alpha), \quad \Lambda(t) = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \alpha}(t, \Phi(t; \tau, \xi, \alpha), \alpha)$$

gelten für

$$X(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \xi}(t; \tau, \xi, \alpha), \quad Y(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \alpha}(t; \tau, \xi, \alpha), \quad \mathbf{z}(t) = \frac{\partial \Phi}{\partial \tau}(t; \tau, \xi, \alpha)$$

die *Variationsgleichungen*

$$\begin{aligned} X' &= J(t)X, & X(\tau) &= E = N \times N \text{ Einheitsmatrix,} \\ Y' &= J(t)Y + \Lambda(t), & Y(\tau) &= O = N \times N \text{ Nullmatrix,} \\ \mathbf{z}' &= J(t)\mathbf{z}, & \mathbf{z}(\tau) &= -\mathbf{f}(\tau, \xi, \alpha). \end{aligned}$$

23. **Monotoniesatz:** $f : (0, a) \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ erfülle die Standardvoraussetzung; $v, w : [0, a) \rightarrow \mathbb{R}$ seien stetig, stetig differenzierbar in $(0, a)$ mit $v(0) \leq w(0)$,

$$v' \leq f(t, v) \quad \text{und} \quad w' \geq f(t, w)$$

in $(0, a)$. Dann gilt $v \leq w$ in $[0, a)$.

24. Ungleichungen für Vektoren, zB. $\mathbf{x} < \mathbf{y}$ bzw. $\mathbf{x} \leq \mathbf{y}$ werden komponentenweise interpretiert: $x_i < y_i$ bzw. $x_i \leq y_i$ für $i = 1, \dots, N$. $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ heißt *quasimonoton wachsend*, wenn die i -te Komponente f_i von \mathbf{f} monoton wachsend ist bezüglich aller Variablen $x_k, k \neq i$ (!). Es gilt dann 23. wortwörtlich für quasimonotone Systeme.
25. **Existenzsatz von Peano:** Sei $G \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$ offen und $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ (nur) stetig. Dann besitzt das AWP $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}), \mathbf{x}(\tau) = \xi$, *wenigstens eine* lokale Lösung, kann aber mehrere lokale Lösungen besitzen.
- Zusatz (o. Beweis):* Jede lokale Lösung hat (wie im Eindeutigkeitsfall) wenigstens eine nicht fortsetzbare Fortsetzung.
26. $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ ist ein *lineares DGL-System*. Dabei ist $A(t)$ eine $N \times N$ -Matrix mit stetigen Einträgen $a_{\mu\nu} : I \rightarrow \mathbb{R}$, und $\mathbf{b}(t)$ ist ein N -Vektor mit stetigen Komponenten $b_\nu : I \rightarrow \mathbb{R}$. Die rechte Seite $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ erfüllt also im Streifen $G = I \times \mathbb{R}^N$ die *Standardvoraussetzung*. Die Lösungen existieren global in I .
27. Die Lösungen des *homogenen* Systems $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ bilden einen Vektorraum $\mathcal{L} = \mathcal{L}_A$ über \mathbb{R} der Dimension N . Bei festem $\tau \in I$ ist die Abbildung $\mathbb{R}^N \rightarrow \mathcal{L}, \xi \mapsto \Phi(\cdot, \tau, \xi)$, ein Vektorraumisomorphismus.
28. Seien Φ_1, \dots, Φ_N Lösungen von $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$. Wir setzen

$$X(t) = (\Phi_1(t), \dots, \Phi_N(t)) \quad \text{und} \quad \omega(t) = \det X(t).$$

Es gilt

$$X' = A(t)X \quad \text{und} \quad \omega' = (\text{spur } A(t))\omega,$$

dabei ist $\text{spur } A = a_{11} + \dots + a_{NN}$ die *Spur* von A . ω heißt *Wronski-Determinante*. Es sind Φ_1, \dots, Φ_N linear unabhängig genau dann, wenn $\omega(t) \neq 0$ in I ist. In dem Fall heißt X *Fundamentalmatrix*, Φ_1, \dots, Φ_N ist eine Basis von \mathcal{L} und heißt auch *Fundamentalsystem* oder *Hauptsystem*. Im anderen Fall ist $\omega(t) \equiv 0$.

Eine *Lösungsmethode* für $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x}$ ist der *Reduktionsansatz von d'Alembert*; er besteht in einer Reduktion der Dimension des Problems.

29. Die *inhomogene* Gleichung $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$ hat (wie immer in derartigen Fällen) die allgemeine Lösung $\mathbf{x} = \mathbf{x}_0 + \mathbf{y}$, wobei \mathbf{x}_0 eine (fest gewählte, sonst beliebige) Lösung der inhomogenen Gleichung ist und \mathbf{y} die allgemeine Lösung der zugehörigen homogenen Gleichung $\mathbf{y}' = A(t)\mathbf{y}$.

Mit der Methode der *Variation der Konstanten*, d.i. der Ansatz $x(t) = X(t)\mathbf{c}(t)$, $X(t)$ eine Fundamentalmatrix für $x' = A(t)x$, erhält man die allgemeine Lösung so:

$$\mathbf{x}(t) = X(t) \left[\mathbf{c}_0 + \int_{\tau}^t X^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \right],$$

$\mathbf{c}_0 \in \mathbb{R}^N$. Speziell für $X(\tau) = E$ ist $\mathbf{x}(t) = X(t) \left[\xi + \int_{\tau}^t X^{-1}(s)\mathbf{b}(s)ds \right]$ Lösung des AWP $\mathbf{x}(\tau) = \xi$.

30. $Lu := u^{(N)} + a_{N-1}(t)u^{(N-1)} + \dots + a_1(t)u' + a_0(t)u = b(t)$, $a_0, a_1, \dots, a_N, b : I \rightarrow \mathbb{R}$ stetig, ist eine *lineare DGL N-ter Ordnung*. Die Lösungen existieren in ganz I . Äquivalent mit $Lu = b(t)$ ist $\mathbf{x}' = A(t)\mathbf{x} + \mathbf{b}(t)$, wobei $x_1 = u, \dots, x_N = u^{(N-1)}$,

$$A(t) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & & \ddots & \\ 0 & 0 & \dots & 1 \\ -a_0(t) & -a_1(t) & \dots & -a_{N-1}(t) \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad \mathbf{b}(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ b(t) \end{pmatrix}.$$

31. Die Lösungen von $Lu = 0$ bilden einen Vektorraum \mathcal{L} über \mathbb{R} der Dimension N . Eine Basis u_1, \dots, u_N heißt *Fundamentalsystem* oder *Hauptsystem*. Die *Wronskische*

$$\text{Determinante ist } \omega(t) = \begin{vmatrix} u_1 & \dots & u_N \\ u_1' & \dots & u_N' \\ \vdots & & \vdots \\ u_1^{(N-1)} & \dots & u_N^{(N-1)} \end{vmatrix}, \text{ sie erfüllt } \omega' = -a_{N-1}\omega.$$

Wieder benutzt man das *Reduktionsverfahren von d'Alembert* und die Methode der *Variation der Konstanten*.

32. Sind in $Lu := u^{(N)} + a_{N-1}u^{(N-1)} + \dots + a_1u' + a_0u = b$ die Koeffizienten a_0, a_1, \dots, a_N, b konstant (reell), so liegt eine lineare DGL *mit konstanten Koeffizienten* vor. Die Lösungen sind C^∞ -Funktionen auf \mathbb{R} . $P(\lambda) = \lambda^N + a_{N-1}\lambda^{N-1} + \dots + a_1\lambda + a_0$ heißt *charakteristisches Polynom* von L .

33. Hat P die verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \dots, \lambda_r \in \mathbb{R}$ mit Vielfachheiten m_1, \dots, m_r , und $\alpha_1 \pm \beta_1, \dots, \alpha_s \pm \beta_s \in \mathbb{C}$ konjugiert komplex mit Vielfachheiten n_1, \dots, n_s , so bilden die Funktionen

$$t \mapsto t^k e^{\lambda_j t}, \quad k = 0, \dots, m_j - 1, \quad j = 1, \dots, r,$$

und

$$t \mapsto t^k e^{\alpha_j t} \cos(\beta_j t), \quad t \mapsto t^k e^{\alpha_j t} \sin(\beta_j t), \quad k = 0, \dots, n_j - 1, \quad j = 1, \dots, s,$$

ein (das *kanonische*) Fundamentalsystem von $Lu = 0$.

34. Behandelt werden noch die *speziellen inhomogenen* Gleichungen $Lu = t^k e^{\mu t}$ und die *Eulersche DGL* – hier heißt die unabhängige Variable x –

$$x^N u^{(N)} + x^{N-1} a_{N-1} u^{(N-1)} + \dots + x a_1 u' + a_0 u = 0.$$

35. Wie findet man einzelne Lösungen $x(t)$ oder sogar ein Fundamentalsystem für $x' = Ax$?

- (a) Zu jedem Eigenwert λ in \mathbb{R} oder \mathbb{C} von A gibt es wenigstens einen Eigenvektor \mathbf{c} in \mathbb{R}^N oder \mathbb{C}^N . Dies führt zu einer bzw. zwei *reellen* Lösungen $e^{\lambda t} \mathbf{c}$ bzw. $\operatorname{Re} [e^{\lambda t} \mathbf{c}]$ und $\operatorname{Im} [e^{\lambda t} \mathbf{c}]$. Auf diese Art und Weise findet man zu festem m -fachen Eigenwert λ bzw. Eigenwertpaar $\lambda, \bar{\lambda}$ so viele bzw. doppelt so viele reelle linear unabhängige Lösungen wie es linear unabhängige Eigenvektoren zu λ gibt. Gibt es eine Basis des \mathbb{C}^N bestehend aus Eigenvektoren, so ist ein Fundamentalsystem bestimmt.

- (b) Gibt es weniger als N linear unabhängige Eigenvektoren, so benutzt man Lösungsansätze der Form $e^{\lambda t}(\mathbf{c}t + \mathbf{c}_1)$, $e^{\lambda t}(\frac{1}{2}\mathbf{c}t^2 + \mathbf{c}_1t + \mathbf{c}_2)$ usw., um weitere linear unabhängige Lösungen und ein Fundamentalsystem zu bestimmen.
36. Wendet man Picard-Iteration auf $X' = AX$, $X(0) = E$, an, so erhält man $X_0(t) = E$, $X_1(t) = E + \int_0^t AX_0(s)ds = E + At$, und allgemein $X_n(t) = E + At + \frac{1}{2}A^2t^2 + \dots + \frac{1}{n!}A^n t^n$, dh. (zunächst formal) die Fundamentalmatrix $X(t) = e^{tA}$.

(a) Für $J = \begin{pmatrix} \lambda & 1 & \dots & 0 \\ & \ddots & \ddots & \\ \vdots & & \lambda & 1 \\ 0 & \dots & \dots & \lambda \end{pmatrix}$ (*Jordan-Block*), $\lambda \in \mathbb{R}$ oder $\lambda = \alpha + i\beta \in \mathbb{C}$,

kann man $X' = JX$, $X(0) = E$ explizit lösen:

$$X(t) = e^{tJ} = e^{\lambda t} \begin{pmatrix} 1 & t & \dots & \frac{t^{N-1}}{(N-1)!} \\ 0 & 1 & \dots & \frac{t^{N-2}}{(N-2)!} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

- (b) Für $A = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$ ergibt sich analog $e^{tA} = \text{diag}(e^{tJ_1}, \dots, e^{tJ_m})$.
- (c) Wiederholung aus der **Linearen Algebra**: Zu jeder (reellen oder komplexen) $N \times N$ -Matrix A gibt es eine reguläre Matrix C mit $CAC^{-1} = J = \text{diag}(J_1, \dots, J_m)$; J ist die *Jordan-Normalform* von A , sie wird aus den Jordan-Blöcken J_k gebildet, vgl 36(a). $\lambda_1, \dots, \lambda_m$ sind die Eigenwerte von A , nicht unbedingt alle verschieden. Es gilt dann $e^{tA} = C^{-1}e^{tJ}C$, womit das Problem, $X(t) = e^{tA}$ zu bestimmen, zumindest theoretisch gelöst ist.
- (d) Eigenschaften von e^A :
- i. $e^A = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}A^n$; das sind N^2 Reihen der Form $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}a_{jk}^{(n)}$, wenn $A^n = (a_{jk}^{(n)})_{j,k=1}^N$. Eine konvergente Majorante ist $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n!}|A|^n$.
 - ii. $e^{A+B} = e^A e^B$ falls $AB = BA$.
 - iii. $\frac{d}{dt}e^{tA} = Ae^{tA}$.

37. $\mathbf{f} : G \rightarrow \mathbb{R}^N$ erfülle die Standardvoraussetzung. Eine Lösung $\mathbf{x}(t, \xi_0) : [0, \infty) \rightarrow \mathbb{R}^N$ heißt

- (a) *stabil*, wenn es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt mit $|\mathbf{x}(t, \xi_0) - \mathbf{x}(t, \xi)| < \epsilon$ für alle $t \geq 0$ und alle ξ mit $|\xi - \xi_0| < \delta$.
- (b) *asymptotisch stabil*, wenn $\mathbf{x}(t, \xi_0)$ stabil ist und es ein $\delta_0 > 0$ gibt mit $\lim_{t \rightarrow \infty} |\mathbf{x}(t, \xi) - \mathbf{x}(t, \xi_0)| = 0$ für alle ξ mit $|\xi - \xi_0| < \delta_0$.

Die Definition impliziert, daß alle Lösungen in $I = [0, \infty)$ existieren. Man kann sich auf die *Null-Lösung* $\mathbf{x}(t, 0) \equiv \mathbf{0}$ beschränken, indem man die neue DGL $\mathbf{y}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \xi_0) + \mathbf{y}) - \mathbf{f}(t, \mathbf{x}(t, \xi_0)) =: \tilde{\mathbf{f}}(t, \mathbf{y})$ für $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{x}(t, \xi_0)$ betrachtet.

38. Stabilitätsätze für die Null-Lösung von $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(t, \mathbf{x})$, wo $\mathbf{f} : [0, \infty) \times \{\mathbf{x} : |\mathbf{x}| < \rho\} \rightarrow \mathbb{R}^N$ die Standardvoraussetzung und $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ erfüllt.

(a) Ist $\mathbf{x} \cdot \mathbf{f}(t, \mathbf{x}) \leq \mu(t)|\mathbf{x}|^2$ für $t \geq 0$, $|\mathbf{x}| < \rho$, und $M(t) = \int_0^t \mu(s)ds$, so gilt:

i. Für $M(t) \leq C$ ist die Null-Lösung stabil.

ii. Für $M(t) \rightarrow -\infty, t \rightarrow \infty$, ist die Null-Lösung asymptotisch stabil.

(b) **Stabilitätssatz (Linearisierungssatz):** Sei $\mathbf{f}(t, \mathbf{x}) = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ und $\lim_{|\mathbf{x}| \rightarrow \mathbf{0}} \frac{\mathbf{g}(t, \mathbf{x})}{|\mathbf{x}|} = \mathbf{0}$ gleichmäßig bzgl. $t \geq 0$. Dann gilt, wenn A die Eigenwerte $\lambda_j, j = 1, \dots, N$, hat:

i. Sind alle $\text{Re } \lambda_j < 0$, so ist die Null-Lösung asymptotisch stabil.

ii. Ist $\text{Re } \lambda_j > 0$ für ein j , so ist die Null-Lösung instabil.

Die Null-Lösung des (nichtlinearen) Systems $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{g}(t, \mathbf{x})$ verhält sich also wie die Null-Lösung des *linearisierten* Systems $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$.

39. Ein *autonomes* oder *dynamisches System* ist ein *zeitunabhängiges* System, dh. ein System, in dem in der rechten Seite die Variable t nicht *explizit* auftritt: $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$. Es gilt $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^N$, $D \subset \mathbb{R}^N$ offen, es wird *generell* $\mathbf{f} \in C^1(D)$ vorausgesetzt. Der Definitionsbereich von \mathbf{f} als *rechter Seite* ist $G = \mathbb{R} \times D \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^N$.

40. Die Lösung von $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ mit $\mathbf{x}(0) = \xi$, das frühere $\Phi(t; 0, \xi)$, wird jetzt mit $\phi_t(\xi)$ bezeichnet, und heißt *Fluß*. Man interpretiert bei festem ξ die Abbildung $t \mapsto \phi_t(\xi)$ als Kurve (*Trajektorie*) im \mathbb{R}^N , und bei festem t die Abbildung $\xi \mapsto \phi_t(\xi)$ als Abbildung $D \rightarrow \mathbb{R}^N$ (*Poincaré-Abbildung*). D bzw. \mathbb{R}^N heißt *Phasenraum*. Durch Zeichnen einiger typischer Trajektorien entsteht das *Phasenporträt*. Das *Richtungsfeld* entsteht wie im \mathbb{R}^2 durch Zeichnen eines kurzen Pfeils durch \mathbf{x} parallel zum Ortsvektor $\mathbf{f}(\mathbf{x})$. Trajektorien müssen auf das Richtungsfeld passen. Sie überschneiden sich nicht und hören nicht in D nach endlicher Zeit auf zu existieren. Das System $\mathbf{x}' = -\mathbf{f}(\mathbf{x})$ hat dasselbe Richtungsfeld und Phasenporträt mit umgekehrter Orientierung.

Die 2D-linearen Systeme $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ lassen sich vollständig klassifizieren, diese Klassifikation dient als Vorbild für nichtlineare autonome Systeme.

41. *Gradientensysteme* im \mathbb{R}^N sind autonome Systeme der Form $\mathbf{x}' = -\text{grad } U(\mathbf{x})$, wobei $U : D \subset \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^2 -Funktion ist. U ist monoton fallend auf Trajektorien, $\frac{d}{dt}U(\mathbf{x}(t)) \leq 0$. Die Mengen $\{\mathbf{x} : U(\mathbf{x}) \leq C\}$ sind positiv invariant. Außer den Ruhelagen gibt es keine geschlossenen Trajektorien.

42. Ein *Hamiltonsches* System kann auch im \mathbb{R}^{2N} betrachtet werden:

$$\mathbf{x}' = \frac{\partial H}{\partial \mathbf{y}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}), \quad \mathbf{y}' = -\frac{\partial H}{\partial \mathbf{x}}(\mathbf{x}, \mathbf{y}).$$

Die Hamiltonfunktion $H : D \subset \mathbb{R}^{2N} \rightarrow \mathbb{R}$ ist konstant auf Trajektorien. Ein Spezialfall mit $H(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \frac{1}{m}U(\mathbf{x}) + \frac{1}{2}\mathbf{y} \cdot \mathbf{y}$ ist die Bewegung eines Massenpunktes in einem *konservativen Kraftfeld*: $m\mathbf{x}'' = -\text{grad } U(\mathbf{x})$, wobei $U \in C^2(D)$ und $D \subset \mathbb{R}^N$ offen. Auf Lösungstrajektorien gilt $\frac{d}{dt}(U(\mathbf{x}) + \frac{m}{2}\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}') = 0$ (Energieerhaltungssatz, $U(\mathbf{x})$ ist die potentielle, $\frac{m}{2}\mathbf{x}' \cdot \mathbf{x}'$ die kinetische Energie).

43. Eine *Erhaltungsgröße* für $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ ist eine stetige Funktion $E : D \rightarrow \mathbb{R}$, die auf keiner offenen Menge konstant ist, wohl aber auf allen Trajektorien. Für C^1 -Funktionen E ist dazu notwendig und hinreichend $\mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } E(\mathbf{x}) = 0$. Existiert eine Erhaltungsgröße, so heißt das System $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ *konservativ* (allgemeiner als 42.). Geschlossene Trajektorien sind möglich. In 2D sind konservative und hamiltonsche Systeme i.W. dasselbe.
44. Reversible Systeme in 2D: Sei $*$ Spiegelung an einer Geraden durch $\mathbf{0} \in \mathbb{R}^2$, zB $(x, y)^* = (x, -y)$, Spiegelung an der x -Achse. Gilt $\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = -\mathbf{f}(\mathbf{x})^*$, so ist jede Trajektorie selbst symmetrisch bzgl. $*$ oder sie hat einen spiegelsymmetrischen Zwillings. Ist $\mathbf{x} = \mathbf{0}$ ein Zentrum des linearisierten Systems $\mathbf{x}' = \mathbf{f}'(\mathbf{0})\mathbf{x}$, so auch des nichtlinearen Systems $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$.
45. Ist $\mathbf{f}(\xi_0) = \mathbf{0}$, dh. ξ_0 ist *stationärer* oder *kritischer Punkt*, so ist $\mathbf{x}(t) = \phi_t(\xi_0) \equiv \xi_0$ die Lösung von $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, $\mathbf{x}(0) = \xi_0$. Diese Lösung heißt *stationär* oder *Ruhelage*.
Stabilitätssatz für Ruhelagen: $\mathbf{f}'(\xi_0)$ habe die Eigenwerte $\lambda_j, 1 \leq j \leq N$. Dann gilt:
- (a) Sind alle $\text{Re } \lambda_j < 0$, so ist die Ruhelage $\mathbf{x}(t) \equiv \xi_0$ asymptotisch stabil.
 - (b) Ist ein $\text{Re } \lambda_j > 0$, so ist sie instabil.
46. Sei $V : D \rightarrow \mathbb{R}$ eine C^1 -Funktion mit $V(\mathbf{x}) > V(\xi_0) = 0$ in $D \setminus \{\xi_0\}$. V heißt *Ljapunov-Funktion* für die Ruhelage ξ_0 , falls in D gilt $\dot{V}(\mathbf{x}) := \mathbf{f}(\mathbf{x}) \cdot \text{grad } V(\mathbf{x}) \leq 0$.
Stabilitätssatz von Ljapunov: Gibt es eine Ljapunov-Funktion, so ist die Ruhelage $\mathbf{x}(t) \equiv \xi_0$ stabil. Gilt sogar $\dot{V}(\mathbf{x}) < 0$ für $\mathbf{x} \neq \xi_0$, so ist sie asymptotisch stabil.
47. **Invarianzsatz:** Sei $\mathbf{f} : D \rightarrow \mathbb{R}^N$ stetig differenzierbar auf der offenen Menge $D \subset \mathbb{R}^N$ und $M \subset D$ abgeschlossen. *Zeigt das Vektorfeld \mathbf{f} in keinem Randpunkt von M nach außen*, so ist M eine (*positiv*) *invariante* Menge, dh: Ist $\xi \in M$, so verbleibt $\phi_t(\xi)$ in M für alle $t \geq 0$.
48. **Satz von Poincaré-Bendixson:** M sei kompakt, positiv invariant für das 2D-System $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ und enthalte keine Ruhelage. Dann enthält M eine geschlossene Trajektorie, genauer: jede in M startende Trajektorie ist entweder geschlossen oder nähert sich einer geschlossenen Trajektorie an.
49. **Satz von Grobman-Hartman:** Das System $(*)$ $\mathbf{x}' = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ sei *hyperbolisch* mit Ruhelage $\xi = \mathbf{0}$, dh. $\mathbf{f}'(\mathbf{0})$ habe keine rein imaginären Eigenwerte. Dann haben $(*)$ und die Linearisierung $\mathbf{y}' = \mathbf{f}'(\mathbf{0})\mathbf{y}$ um $\mathbf{0}$ topologisch und orientierungserhaltend dasselbe Phasenporträt.