Skriptum zur Vorlesung

Funktionentheorie I

Prof. Dr. Norbert Steinmetz

Das Skriptum bildet die Grundlage und ist Bestandteil der Vorlesung Funktionentheorie I im Sommersemester 2002. Es enthält keine Beweise und keine durchgerechneten Beispiele, und ist daher zum Selbststudium nicht geeignet. Gut geeignet zum Selbstlösen sind die zahlreichen und erprobten Übungsaufgaben.

Literatur

L.V. Ahlfors, Complex Analysis, McGraw-Hill

Th. Gamelin, Complex Analysis, Springer-Verlag

W. Fischer, I. Lieb, Funktionentheorie, Vieweg-Verlag

F. Lorentz, Funktionentheorie, Spektrum-Verlag

T. Needham, Anschauliche Funktionentheorie, Oldenbourg-Verlag

W. Rudin, Real and Complex Analysis, McGraw-Hill

Vorlesung:	Dienstag	8-10	M/E 28
	Mittwoch	10-12	M/E 28
Übung:	Donnerstag	12-14	SR 611
	Donnerstag	14-16	SR 1011

Inhalt

Die komplexe Ebene und die Riemannsche Zahlenkugel bilden den Grundbereich der Funktionentheorie; dort sind ihre Objekte, die analytischen Funktionen, definiert und haben sie ihre Werte. In den einführenden Paragraphen werden die grundlegenden algebraischen, geometrischen und topologischen Eigenschaften der komplexen Ebene und der Zahlenkugel zusammengestellt.

§ 1 Komplexe Zahlen

$\mathbb{C} = \{z = x + iy : \; x, y \in \mathbb{R}\}$ bezeichnet den Körper der komplexen Zahlen mit der Addition $z_1 + z_2 = (x_1 + x_2) + i(y_1 + y_2)$ und der Multiplikation $z_1 \cdot z_2 = (x_1x_2 - y_1y_2) + i(x_1y_2 + x_2y_1)$; i ist die imaginäre Einheit, zugrunde liegt $i^2 = i \cdot i = -1$.
$z = x + iy \in \mathbb{C}$ wird in natürlicher Weise mit $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ identifiziert, ebenso Teilmengen von $\mathbb{C}$ mit entsprechenden Teilmengen von $\mathbb{R}^2$.

Darstellung komplexer Zahlen und Mengen komplexer Zahlen in der Gaußschen Zahlenebene: $\mathbb{R} = \{x = x + i0 : x \in \mathbb{R}\}$ ist ein Teilkörper von $\mathbb{C}$, er bildet geometrisch die reelle Achse, die Menge der imaginären Zahlen $i\mathbb{R} = \{iy = 0 + iy : y \in \mathbb{R}\}$ ist die imaginäre Achse.

Die konjugiert komplexe Zahl zu $z = x + iy$ ist $\overline{z} = x - iy$, geometrisch Spiegelung an $\mathbb{R}$.
Einfache Regeln: $\overline{a \pm b} = \overline{a} \pm \overline{b}$, $\quad \overline{ab} = \overline{a}\,\overline{b}$, $\quad \overline{\left(\frac{a}{b}\right)} = \frac{\overline{a}}{\overline{b}}$
Realteil von $z = x + iy$: $\operatorname{Re} z = x = \frac{1}{2}\big(z + \overline{z}\big)$
Imaginärteil von $z = x + iy$: $\operatorname{Im} z = y = \frac{1}{2i}\big(z - \overline{z}\big)$.

Der absolute Betrag $|z| = \sqrt{z\overline{z}} = \sqrt{x^2 + y^2}$ von z ist der euklidische Abstand $\|(x, y)\|$ von (x, y) zum Ursprung $(0, 0)$. Es gilt $\dfrac{1}{a} = \dfrac{\overline{a}}{|a|^2}$ für $a \neq 0$, $|\overline{a}| = |ia| = |a| = |-a|$,
$|\operatorname{Re} z| \le |z|$, $\quad |\operatorname{Im} z| \le |z|$ und $|z| \le |\operatorname{Re} z| + |\operatorname{Im} z|$.

Dreiecksungleichung *Für beliebige komplexe Zahlen z und w gilt*

$$|z + w| \le |z| + |w|,$$

und Gleichheit, außer in den trivialen Fällen $z = 0$ bzw. $w = 0$, genau dann, wenn $w/z > 0$ ist. Die umgekehrte Dreiecksungleichung *ist* $\big||z| - |w|\big| \le |z - w|$.

Jeder Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ hat bekanntlich eine Darstellung der Form $(r\cos\theta, r\sin\theta)$, wobei $r = \sqrt{x^2 + y^2}$ ist und $\theta \in \mathbb{R}$ als Winkel interpretiert wird. Für $z = x + iy$ findet man so $z = |z|(\cos\theta + i\sin\theta)$, und mit der Eulerschen Formel $e^{i\theta} = \cos\theta + i\sin\theta$ die Polarkoordinatendarstellung $z = |z|e^{i\theta}$.
Eindeutig bestimmt wird diese Darstellung, wenn man $\theta \in I$, I ein halboffenes Intervall der Länge 2π, verlangt. Dieses θ heißt dann Argument von z: $\theta = \arg z$ Meistens wählt man $I = (-\pi, \pi]$ oder $I = [0, 2\pi)$. Es gilt $z_1z_2 = r_1r_2e^{i(\theta_1+\theta_2)}$.

Für $a \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$, und $n \in \mathbb{N}$, $n \ge 2$, hat die Gleichung $z^n = a$ genau n Lösungen, die n-ten Wurzeln von a; für jede dieser Wurzeln wird $\sqrt[n]{a}$ geschrieben. Wird $\arg z$ durch das Intervall $I = \big[\frac{\alpha}{n}, \frac{\alpha}{n} + 2\pi\big)$ festgelegt, so sind die n-ten Wurzeln von a

$$z_k = \sqrt[n]{|a|}e^{(\alpha+2k\pi i)/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Speziell für $a = 1$ spricht man von den n-ten Einheitswurzeln

$$\omega_k = e^{2k\pi i/n}, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1$$

Sie liegen regelmäßig verteilt auf der Einheitskreislinie $|z| = 1$ im Winkelabstand $2\pi/n$. Schließlich sei noch $\omega_k = \omega_1^k$, $z_k = z_0\omega_1^k$ und $z^n - 1 = \prod_{k=0}^{n-1} (z - \omega_k)$ vermerkt.

Aufgaben zu §1

1. *Man zeige, daß die Matrizen* $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ $a, b \in \mathbb{R}$, *mit der üblichen Matrizenaddition und -multiplikation einen Körper bilden, und daß* $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto a+ib$ *ein Isomorphismus zwischen diesem und dem Körper der komplexen Zahlen ist.*

2. *Man skizziere die durch folgende Ungleichungen charakterisierten Mengen: (a)* $\operatorname{Re} \dfrac{z-1}{z+1} < 0$; *(b)* $-\dfrac{1}{2} < \operatorname{Im} \dfrac{1}{z} < -\dfrac{1}{3}$; *(c)* $\left|\dfrac{z-a}{z-\overline{a}}\right| < 1, a \notin \mathbb{R}$.

3. *Dasselbe für (a)* $\operatorname{Re} z^2 < 0$; *(b)* $|z - i| + |z + i| = 4$; *(c)* $\left|z^2 - 1\right| < 1$.

4. *Man beweise, bei festem* a, $|a| < 1$*:* $\left|\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}\right| < 1 \iff |z| < 1$.

5. *Man zeige* $\left|\dfrac{|z|-|w|}{1-|zw|}\right| \le \left|\dfrac{z-w}{1-\overline{z}w}\right| \le \dfrac{|z|+|w|}{1+|zw|}$ *für* $|z|, |w| < 1$.

6. *Man bestimme in kartesischen und in Polarkoordinaten die vierten Wurzeln von* -1.

7. *Man berechne Betrag und Argument von* $\prod_{\operatorname{Im}\,\omega^k>0} (1 + \omega^k)$, $\omega = e^{2\pi i/n}$.

8. *Man gebe eine explizite analytische Darstellung von* $\theta = \arg(x + iy)$ *an* $(-\pi < \theta < \pi)$*, getrennt für* $x > 0$, $y > 0$ *bzw.* $y < 0$.

9. *Man bestimme alle Lösungen der Gleichung* $z^5 = \overline{z}$.

10. *Man bestimme explizit (formelmäßig) unter Verwendung der reellen Quadratwurzel die Funktionen* u *und* v *in der Darstellung* $\sqrt{x + iy} = u(x, y) + iv(x, y)$, $u > 0$.

§ 2 Die Riemannsche Zahlenkugel

$S^2 = \left\{\xi \in \mathbb{R}^3 : \|\xi\|^2 = \xi_1^2 + \xi_2^2 + \xi_3^2 = 1\right\}$ ist die 2-Sphäre und $N = (0, 0, 1)$ ihren Nordpol. Die Abbildung

$$\sigma : S^2 \setminus \{N\} \to \mathbb{C}, \quad \xi \mapsto \frac{\xi_1 + i\xi_2}{1 - \xi_3},$$

die eine einfache geometrische Bedeutung besitzt, heißt stereographische Projektion.

Satz *Die stereographische Projektion* $\sigma : S^2 \setminus \{N\} \longrightarrow \mathbb{C}$ *ist eine Bijektion; explizit ist ihre Umkehrabbildung gegeben durch*

$$\sigma^{-1}(z) = \left(\frac{2\mathrm{Re}\, z}{|z|^2 + 1}, \frac{2\mathrm{Im}\, z}{|z|^2 + 1}, \frac{|z|^2 - 1}{|z|^2 + 1}\right).$$

$\mathbb{C}$ wird durch ein Element ∞ erweitert, $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ (Ein-Punkt-Kompaktifizierung). Die arithmetischen Operationen lassen sich in einigen Fällen erweitern, so ist z. B. $a \cdot \infty = \dfrac{a}{0} = \infty$ für $a \neq 0$, und $b \pm \infty = \infty$, $\dfrac{b}{\infty} = 0$ für $b \neq \infty$. Ausdrücklich nicht definiert werden $0 \cdot \infty$, $\dfrac{0}{0}$, $\infty \pm \infty$ und $\dfrac{\infty}{\infty}$.

Man setzt die stereographische Projektion σ fort zu einer Bijektion von S^2 auf $\widehat{\mathbb{C}}$ durch $\sigma(N) = \infty$. $\widehat{\mathbb{C}}$ heißt Riemannsche Zahlenkugel (besser wäre -sphäre). Die euklidische Metrik auf $S^2 \subset \mathbb{R}^3$ wird mittels der stereographischen Projektion auf $\widehat{\mathbb{C}}$ übertragen: Ist $z = \sigma(\xi)$ und $w = \sigma(\eta)$, so erhält man die chordale Metrik $\chi(z,w) = \|\xi - \eta\|$, explizit

$$\chi(z,\infty) = \chi(\infty,z) = \frac{2}{\sqrt{1+|z|^2}} \text{ für } z \neq \infty \text{ und } \chi(z,w) = \frac{2|z-w|}{\sqrt{1+|z|^2}\sqrt{1+|w|^2}} \text{ für } z,w \neq \infty.$$

Aufgaben zu §2

1. *Man zeige, daß zwei Punkte auf S^2 (keiner davon der Nordpol) genau dann ein Antipodenpaar bilden, wenn ihre Projektionen a und b die Bedingung $a\bar{b} = -1$ erfüllen.*

2. *Man zeige, daß die stereographische Projektion Kreise auf S^2 auf Kreise bzw. Geraden in $\widehat{\mathbb{C}}$ abbildet (eine Gerade in $\widehat{\mathbb{C}}$ ist eine gewöhnliche Gerade zusammen mit dem Punkt ∞).*

3. *Man verifiziere die angegebene Darstellung des chordalen Abstandes.*

4. *Eine Spiegelung von S^2 an der Äquatorebene induziert eine Selbstabbildung von $\widehat{\mathbb{C}}$. Welche?*

5. *Es sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{C}$ und $z \in \mathbb{C}$. Man zeige, daß $z_n \to z$, d.h., $|z_n - z| \to 0$ genau dann gilt, wenn $\chi(z_n, z) \to 0$ für $n \to \infty$.*

§ 3 Topologische Grundbegriffe

Als bekannt vorausgesetzt werden die topologischen Grundbegriffe offen, abgeschlossen, Rand, innerer Punkt, Häufungspunkt usw. sowie die Begriffe Grenzwert, Stetigkeit usw. Für Punktmengen von $\mathbb{C}$ spielt es keine Rolle, ob die topologischen Begriffe mithilfe des euklidischen oder des chordalen Abstandes erklärt werden. Die üblichen Bezeichnungen für das Innere, den Rand und den Abschluß einer Menge M sind M°, ∂M und $\overline{M}$. Der Punkt ∞ kommt immer als Rand- oder Häufungspunkt in Betracht; er ist Randpunkt und Häufungspunkt jeder(!) in $\mathbb{C}$ unbeschränkten Menge.

Ein Weg γ in $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ ist eine stetige Abbildung $\gamma : [a,b] \longrightarrow E$; er verläuft vom Anfangspunkt $\gamma(a)$ zum Endpunkt $\gamma(b)$. $E \subset \mathbb{C}$ heißt wegzusammenhängend, wenn es zu je zwei Punkten $z, w \in E$ einen Weg γ in E von z nach w gibt. Eine offene und wegzusammenhängende Menge heißt Gebiet. Wichtige Beispiele sind: Die Ebene $\mathbb{C}$, die Einheitskreisscheibe $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ (jede offene Kreisscheibe), die obere Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : \text{Im } z > 0\}$ (jede offene Halbebene), und der (jeder) Kreisring $\mathcal{A}_r = \{z \in \mathbb{C} : r < |z| < 1\}$.

Zwischenwertsatz (I) *Das stetige Bild einer wegzusammenhängenden Menge E ist wieder wegzusammenhängend. Insbesondere ist für jede stetige Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ das Bild $f(E)$ ein Intervall, d.h. jede stetige Funktion besitzt die Zwischenwerteigenschaft.*

Alle Mengen $A, B, C, D, E, \ldots$ sind $\subseteq \widehat{\mathbb{C}}$, genauer Teilmengen des metrischen Raumes $(\widehat{\mathbb{C}}, \chi)$. Eine Partition (A, B) von $E \neq \emptyset$ besteht aus offenen Mengen A, B mit den Eigenschaften:

$$E \subseteq A \cup B, \quad E \cap A \cap B = \emptyset \text{ und } E \cap A \neq \emptyset, \quad E \cap B \neq \emptyset.$$

E heißt zusammenhängend, wenn E keine Partition besitzt. Genausogut kann man auch von einer Partition (A, B) mit abgeschlossenen Mengen ausgehen.

Hilfssatz *Sind E_α, $\alpha \in J$, [weg-]zusammenhängende Mengen und ist $E_\alpha \cap E_\beta \neq \emptyset$ für je zwei Indizes $\alpha, \beta \in J$, so ist auch $E = \bigcup_{\alpha \in J} E_\alpha$ [weg-]zusammenhängend.*

Satz *Jede wegzusammenhängende Menge ist zusammenhängend. Die einzigen zusammenhängenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ sind die Intervalle.*

Zwischenwertsatz (II) *Das stetige Bild einer zusammenhängenden Menge ist wieder zusammenhängend. Eine Menge E ist genau dann zusammenhängend, wenn für jede stetige Funktion $f : E \to \mathbb{R}$ das Bild $f(E)$ ein Intervall ist, somit jede stetige Funktion die Zwischenwerteigenschaft besitzt.*

Satz *Jede offene und zusammenhängende Menge ist auch wegzusammenhängend.*

Komponentenzerlegung *Jede nichtleere Menge E besteht aus paarweise disjunkten, maximal zusammenhängenden Teilmengen, den (Zusammenhangs-) Komponenten von E.*

Eine zusammenhängende Teilmenge C von E heißt maximal zusammenhängend, wenn sie in keiner zusammenhängende Teilmenge von E echt enthalten ist. Die Komponentenzerlegung ist eindeutig bestimmt.

Zusatz *Ist E offen, so sind alle Komponenten von E offen und es gibt höchstens abzählbar viele Komponenten. Die Komponenten einer abgeschlossenen Menge sind abgeschlossen.*

Ein Gebiet $D \subseteq \widehat{\mathbb{C}}$ heißt n-fach zusammenhängend, wenn das Komplement $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ aus n Komponenten besteht, ansonsten unendlich zusammenhängend. Beispielsweise sind $\mathbb{D}$, $\mathbb{H}$ und $\mathbb{C}$ einfach zusammenhängend ($n = 1$), ebenso der Parallelstreifen $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ (überraschenderweise?). Der Kreisring $\mathcal{A}_r$ ist zweifach zusammenhängend (ein Ringgebiet), und $\mathbb{C} \setminus \mathbb{N}$ ist unendlich zusammenhängend. Die Zahlenkugel $\widehat{\mathbb{C}}$ ist 0-fach zusammenhängend. Ist das Gebiet D mehrfach zusammenhängend ($n > 1$) und A eine Komplementärkomponente, so ist $G = \widehat{\mathbb{C}} \setminus A$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.

Aufgaben zu §3

1. *Man zeige, daß in der Zusammenhangsdefinition die Bedingung A* und *B* offen *durch A* und *B* abgeschlossen *ersetzt werden kann.*

2. *Man zeige, daß mit C auch jede Menge D mit $C \subseteq D \subseteq \overline{C}$ zusammenhängend ist.*

3. *Man zeige direkt anhand der Definition, daß ein Quadrat zusammenhängend ist.*

4. *Man zeige: Besteht die abgeschlossene Menge E aus unendlich vielen Komponenten, so kann sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ in n disjunkte und abgeschlossene Teilmengen zerlegt werden.*

5. *Man zeige, daß die Mengen $\{z = x + iy : 0 < x \le 1,\ y = \sin \frac{\pi}{x}\}$ und $\{iy : -1 \le y \le 1\}$ wegzusammenhängend sind, und ihre Vereinigung zwar zusammenhängend, aber nicht wegzusammenhängend ist.*

6. *Dasselbe für die Mengen $\left\{e^{(1+i)t} + e^{it} : t \in \mathbb{R}\right\}$ und $\partial\mathbb{D}$.*

7. *Man belege durch ein Beispiel, daß $\overline{C}$ nicht wegzusammenhängend sein muß, obwohl die Menge C dies ist.*

8. *Man zeige: Ist D ein Gebiet und C eine Komponente von $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$, so ist $G = \widehat{\mathbb{C}} \setminus C$ ein einfach zusammenhängendes Gebiet.*

9. *Man zeige, daß der Parallelstreifen $\{z : 0 < \operatorname{Im} z < 1\}$ einfach zusammenhängend ist.*

10. *Man zeige allgemein: Ist (D_k) eine wachsende Folge von Gebieten, deren Zusammenhangszahlen eine monoton wachsende Folge (n_k) bilden, so ist $D = \bigcup_{k \ge 1} D_k$ ein Gebiet der Zusammenhangszahl $\lim_{k\to\infty} n_k$.*

11. *Man zeige: Ist C_n eine ineinandergeschachtelte Folge von nichtleeren, zusammenhängenden und kompakten Mengen, so ist auch $C = \bigcap_{n \ge 1} C_n$ (kompakt und) zusammenhängend.*

    Hinweis: Ist (A, B) eine Partition von C aus kompakten Mengen, so ist die Funktion

    $$\delta(z) = \operatorname{dist}(z, A)/(\operatorname{dist}(z, A) + \operatorname{dist}(z, B))$$

    stetig in $\mathbb{C}$, und in C_n gibt es Stellen z_n mit $\delta(z_n) = 1/2$, wohingegen $\delta(C) = \{0, 1\}$ ist.

Im Mittelpunkt der Funktionentheorie stehen die holomorphen (=analytischen) Funktionen einer komplexen Veränderlichen. Ihre einfachsten Eigenschaften werden in den folgenden Paragraphen diskutiert. Daneben werden in Kürze die elementaren Funktionen – Abkömmlinge der Exponentialfunktion – und, ausführlicher, die Möbiustransformationen untersucht. Im Zusammenspiel dieser mit elementaren nichtlinearen Transformationen werden einige einfache Abbildungsaufgaben gelöst.

§ 4 Differentialrechnung

In diesem Paragraphen ist $D \subseteq \mathbb{C}$ immer ein Gebiet, und stets $f, g : D \to \mathbb{C}$.
f heißt differenzierbar im Punkt $z_0 \in D$, wenn (wie bei reellen Funktionen einer reellen Veränderlichen) der Grenzwert $\lim_{z \to z_0} \dfrac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0} = f'(z_0)$ existiert; $f'(z_0)$ ist dann die Ableitung von f im Punkt z_0. Die Funktion f heißt holomorph in D, wenn f' in jedem Punkt von D existiert; anstelle $f'(z)$ wird zuweilen auch $\dfrac{d}{dz} f(z)$ geschrieben.

f heißt holomorph in der Menge E, wenn es ein Gebiet $D \supseteq E$ gibt, in dem f (definiert und) holomorph ist; somit heißt f holomorph im Punkt z_0, wenn f in einer Umgebung $\{z : |z - z_0| < \delta\}$ holomorph ist; schließlich heißt f holomorph im Punkt ∞, wenn $g(z) = f(1/z)$ im Punkt $z = 0$ holomorph ist, wobei $g(0)$ als der voraussetzungsgemäß endliche Grenzwert $\lim_{z \to \infty} f(z) = f(\infty)$ definiert ist. Die Ableitung $f'(\infty)$ wird ausdrücklich nicht erklärt.

Die wichtigsten Rechenregeln sind (wie im Reellen):

$$\begin{array}{lrcl} \text{Summenregel:} & (f+g)' & = & f' + g'; \\ \text{Produktregel:} & (fg)' & = & f'g + fg'; \\ \text{Quotientenregel:} & \left(\dfrac{f}{g}\right)' & = & \dfrac{f'g - fg'}{g^2}; \\ \text{Kettenregel:} & (f \circ g)' & = & (f' \circ g)g'; \end{array}$$

$u : D \to \mathbb{R}$ heißt bekanntlich reell differenzierbar im Punkt $z_0 = x_0 + iy_0$, wenn es $a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ gibt mit $u(z_0 + h) = u(x_0, y_0) + a_1 h_1 + a_2 h_2 + o\big((h_1^2 + h_2^2)^{1/2}\big)$ für $|h| = \sqrt{h_1^2 + h_2^2} \to 0$; dabei ist $a_1 = u_x(z_0)$ und $a_2 = u_y(z_0)$. Komplexe geschrieben lautet dies $u(z_0 + h) = u(z_0) + ah + \overline{a}\overline{h} + o(|h|)$ für $h \to 0$, mit $a = \frac{1}{2}(a_1 - ia_2) = \frac{1}{2}(u_x(z_0) - iu_y(z_0))$.
$f = u + iv$ heißt reell differenzierbar, wenn u und v dies sind. Äquivalent ist

$$f(z_0 + h) = f(z_0) + ph + q\overline{h} + o(|h|),$$

wobei $p = a + ib$, $q = \overline{a} + i\overline{b}$ und $b = \frac{1}{2}(b_1 - ib_2) = \frac{1}{2}(v_x(z_0) - iv_y(z_0))$ ist.

$$f_z(z) = \frac{1}{2}\left(f_x(z) - i f_y(z)\right) \quad \text{und} \quad f_{\overline{z}}(z) = \frac{1}{2}\left(f_x(z) + i f_y(z)\right)$$

nennt man die Wirtingerableitungen von f.

Cauchy-Riemannsche Differentialgleichungen *$f = u + iv$ ist genau dann differenzierbar im Punkt z_0, wenn f im Punkt z_0 reell differenzierbar ist und das System der Cauchy-Riemannschen Differentialgleichungen $u_x = v_y$, $u_y = -v_x$ dort erfüllt ist. Es gilt dann $f'(z_0) = f_z(z_0)$ und $f_{\overline{z}}(z_0) = 0$.*

Satz *Eine im Gebiet D holomorphe Funktion mit $f'(z) = 0$ in D ist konstant.*

f ist bereits dann konstant, wenn durchgehend in D wenigstens eine der Bedingungen (i) $u_x = 0$, (ii) $u_y = 0$, (iii) $v_x = 0$, (iv) $v_y = 0$ oder (v) $|f| = \text{Const.}$ erfüllt ist.

Winkeltreue: Es sei $\gamma : z = \gamma(t)$, $-\sigma \le t \le \sigma$, eine Kurve mit Tangente $z = z_0 + \gamma'(0)\tau$, $-\infty < \tau < \infty$ in $z = z_0$. Ist f holomorph im Punkt z_0 und ist $f'(z_0) \neq 0$, so hat die Bildkurve $\Gamma : w = \Gamma(t) = f(\gamma(t))$ im Punkt $f(z_0)$ die Tangente $w = f(z_0) + f'(z_0)\gamma'(0)\tau$, $-\infty < \tau < \infty$ Die Tangentenrichtung ist also um den Winkel $\arg f'(z_0)$ gegenüber der der Urbildkurve gedreht, und dieser Drehwinkel ist unabhängig von γ. Schneiden sich zwei Kurven γ_1 und γ_2 im Punkt z_0, so ist $\angle(\gamma_1, \gamma_2) = \arg \dfrac{\gamma_2'(0)}{\gamma_1'(0)} \mod 2\pi$ der gerichtete Winkel zwischen beiden Kurven. Für die Bildkurven $\Gamma_j : w = \Gamma_j(t) = f(\gamma_j(t))$ gilt dann $\angle(\Gamma_1, \Gamma_2) = \angle(\gamma_1, \gamma_2)$. Diese Eigenschaft bezeichnet man als Winkeltreue im Punkt z_0 (Konformität im Kleinen). Winkel und Winkeltreue im Punkt ∞ definiert man durch Übergang zur Variablen $w = 1/z$.

Eine Funktionenfolge (f_n) heißt bekanntlich in $E \subset \widehat{\mathbb{C}}$ gleichmäßig konvergent gegen f, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ einen Index $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ gibt, so daß in E gilt $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ für alle $n > n_\varepsilon$. Sie heißt lokal gleichmäßig konvergent, wenn es zu jedem $z \in E$ eine Umgebung U gibt, so daß in $U \cap E$ gleichmäßige Konvergenz herrscht. Gleichbedeutend ist nach dem Satz von Heine-Borel die gleichmäßige Konvergenz in kompakten Teilmengen von E. Bei Funktionenreihen $\sum\limits_{k=1}^{\infty} f_k(z)$ werden dieser Begriffe über die Folge (s_n) der Partialsummen $s_n(z) = \sum\limits_{k=1}^{n} f_k(z)$ erklärt. Absolute Konvergenz bedeutet die Konvergenz der Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |f_k(z)|$. Die wichtigsten Kriterien für die absolute Konvergenz sind Wurzelkriterium, Quotientenkriterium und Majorantenkriterium.

Zu den wichtigsten Funktionenreihen innerhalb der Funktionentheorie, ja innerhalb der gesamten Analysis, gehören die Potenzreihen

$$(*) \quad \sum_{n=0}^{\infty} c_n (z - z_0)^n;$$

hier sind die Koeffizienten c_n, der Entwicklungsmittelpunkt z_0 und die Variable z komplexe Zahlen. Wie in der reellen Analysis ist

$$r = \frac{1}{\limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|c_n|}}$$

der Konvergenzradius (Formel von Cauchy-Hadamard): Konvergenz herrscht in der Kreisscheibe $\{z : |z - z_0| < r\}$, und Divergenz in $\{z : |z - z_0| > r\}$, Punkte auf $|z - z_0| = r$ sind eigens zu untersuchen. Für $r = 0$ heißt die Potenzreihe nirgends konvergent, für $r = \infty$ herrscht überall absolute Konvergenz. Für $0 < r \le +\infty$ hat man gleichmäßige Konvergenz in jeder Kreisscheibe $|z - z_0| \le \rho < r$.

Satz *Hat die Potenzreihe (*) den Konvergenzradius $r > 0$, so stellt sie in $|z - z_0| < r$ eine holomorphe Funktion f dar. Es gilt*

$$f'(z) = \sum_{n=1}^{\infty} n c_n (z - z_0)^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) c_{n+1} (z - z_0)^n,$$

und die rechtsstehende Potenzreihe hat denselben Konvergenzradius r wie die Ausgangsreihe selbst.

Abelscher Grenzwertsatz $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n z^n$ *habe Konvergenzradius $r = 1$ und sei konvergent in $z = 1$. Dann hat man gleichmäßige Konvergenz in jedem* Stoltz-Winkel W: $|\arg(z - 1)| \le \pi/2 - \delta$, $\operatorname{Re} z \ge x_0(\delta)$; *insbesondere gilt* $\lim\limits_{z\to 1, z\in W} f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} c_n$.

Aufgaben zu §4

1. *Man berechne die Wirtingerableitungen von*
   (a) $f(z) = |z|^2 = z\overline{z}$, *(b)* $f(z) = |z| \operatorname{Re} z$ *und* *(c)* $f(z) = \dfrac{az + b\overline{z}}{cz + d\overline{z}}$.
2. *Man formuliere und beweise eine Produkt-, Quotienten- und Kettenregel für die Wirtingerableitungen.*
3. *Man berechne* g_z *und* $g_{\overline{z}}$ *für* $g(z) = \overline{f(z)}$ *in Termen von* f_z *und* $f_{\overline{z}}$.
4. *Man zeige: Ist* f *holomorph im Gebiet* D, *so ist* $f^*(z) = \overline{f(\overline{z})}$ *holomorph im Gebiet* $D^* = \{z : \overline{z} \in D\}$.
5. *Man zeige, daß die Funktion* $f(x + iy) = \log(x^2 + y^2) + 2i \arctan \dfrac{y}{x}$ *in der Halbebene* $\operatorname{Re} z = x > 0$ *holomorph ist.*
6. *Man zeige, daß eine holomorphe Funktion* $f = u + iv$ *bereits dann konstant ist, wenn sie konstantes Argument hat.*
7. *Man zeige, daß sich zwei parallele Geraden im Punkt* ∞ *unter dem Winkel* 0 *schneiden (berühren).*
8. *Dasselbe für den oberen und unteren Teil der Parabel* $y^2 = x$.
9. *Man zeige: Ist* f *im Punkt* z_0 *reell differenzierbar und dort winkeltreu, so ist* f *in* z_0 *sogar differenzierbar.*
10. *Bei gegebenen* $a_0, \ldots, a_{s-1}$ *und* $\beta_1, \ldots, \beta_s$ *sei die Folge* (a_n) *rekursiv durch* $a_n = \beta_1 a_{n-1} + \cdots + \beta_s a_{n-s}$ *definiert. Man zeige, daß* $\sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *einen positiven Konvergenzradius hat und im Konvergenzkreis eine rationale Funktion* f *darstellt.*
11. *(fortgesetzt) Man zeige: Hat* f *die Form* P/Q *mit teilerfremden Polynomen* P *und* Q, *so ist der Konvergenzradius der betrachteten Potenzreihe gerade der Betrag der betragskleinsten Nullstelle von* Q.
12. *(fortgesetzt) Man berechne* f *für* $\beta_1 = \beta_2 = 1$ *und* $a_0 = a_1 = 1$ *(Fibonaccifolge).*
13. *Es sei* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} z^{2^n}$. *Man zeige* $f(z) = f(z^{2^p}) + \sum\limits_{n=0}^{p-1} z^{2^n}$ *und folgere* $\lim\limits_{r \to 1} f\left(re^{i\pi\theta}\right) = \infty$ *für jedes rationale* θ *der Form* $\frac{k}{2^p}$.

§ 5 Exponentialfunktion und Logarithmus

Die Exponentialfunktion ist wie im Reellen definiert

$$e^z = \exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}.$$

Die Exponentialreihe konvergiert für alle komplexen z, daher ist die Exponentialfunktion eine in ganz $\mathbb{C}$ holomorphe Funktion – eine ganze Funktion. Viele ihrer Eigenschaften werden erst im Komplexen sichtbar.

(i) $\dfrac{d}{dz} e^z = e^z$;

(ii) $e^{z+w} = e^z e^w$;

(iii) $e^{-z} = \dfrac{1}{e^z}$, insbesondere ist $e^z \neq 0$ in $\mathbb{C}$;

(iv) $e^{x+iy} = e^x e^{iy} = e^x\,(\cos y + i \sin y)$ für reelle x und y.

Man definiert die trigonometrischen Funktionen Sinus und Cosinus für komplexe z durch

$$\cos z = \frac{e^{iz} + e^{-iz}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!}\, z^{2n}$$

und

$$\sin z = \frac{e^{iz} - e^{-iz}}{2i} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!}\ z^{2n+1}.$$

(v) $e^{iz} = \cos z + i \sin z$ (Eulersche Formel)

(vi) $e^{z+2\pi i} = e^z$, $2\pi i$-Periodizität; jede weitere Periode hat die Form $2k\pi i$ mit $k \in \mathbb{Z}$; $2\pi i$ ist eine primitive Periode.

(vii) Die Exponentialfunktion $z \to e^z$ bildet ab:

(α) die Gerade Re $z = x_0$ auf die Kreislinie $|w| = e^{x_0}$;

(β) die Gerade Im $z = y_0$ auf den Strahl $\arg w = y_0$;

(γ) den Parallelstreifen $\{z : -\pi < \text{Im } z < \pi\}$ bijektiv auf $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$

(δ) den Parallelstreifen $\{z : -\pi/2 < \text{Im } z < \pi/2\}$ bijektiv auf die rechte Halbebene.

Die hyperbolischen Funktionen sind

$$\cosh z = \frac{e^z + e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n}}{(2n)!} = \cos iz$$

und

$$\sinh z = \frac{e^z - e^{-z}}{2} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^{2n+1}}{(2n+1)!} = -i \sin iz$$

Ihr Zusammenhang mit den trigonometrischen Funktionen wird erst im Komplexen ersichtlich!

Jede Lösung der Gleichung $e^z = w$ nennt man einen Logarithmus von w, die übliche Bezeichnung ist $z = \log w$. Kennt man einen Logarithmus von w, so kennt man alle: $\log w + 2k\pi i$, $k \in \mathbb{Z}$.

(viii) $\log(w_1 w_2) = \log w_1 + \log w_2 \mod 2\pi i$,

(ix) Im Gebiet $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ist $\log z = \log |z| + i \arg z$, $-\pi < \arg z < \pi$, holomorph, und es gilt $\dfrac{d}{dz} \log z = \dfrac{1}{z}$.

Im gleichen Gebiet $D = \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ erklärt man auch die allgemeine Potenz als holomorphe Funktion durch $z^\alpha = e^{\alpha \log z}$, $\alpha \in \mathbb{C}$. Nach der Kettenregel ist $\dfrac{d}{dz} z^\alpha = \alpha z^{\alpha - 1}$.
$w = z^\alpha$ bildet für $\alpha > 0$ den Strahl $\arg z = \theta$ auf den Strahl $\arg w = \theta\alpha$ ab, und den Kreisbogen $z = re^{i\theta}$, $\theta_1 < \theta < \theta_2$, auf den Kreisbogen $w = r^\alpha e^{i\varphi}$, $\theta_1\alpha < \varphi < \theta_2\alpha$, somit das Kreisbogenviereck $r_1 < |z| < r_2$, $-\pi < \theta_1 < \arg z < \theta_2 \leq \pi$ auf das Kreisbogenviereck $r_1^\alpha < |w| < r_2^\alpha$, $\alpha\theta_1 < \arg w < \theta_2\alpha$. Für $\alpha(\theta_2 - \theta_1) \leq 2\pi$ ist diese Abbildung bijektiv.

Aufgaben zu §5

1. *Man berechne die Nullstellen von* $\sin z$.

2. *Man zeige, daß* $\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{(2n)!}$ *eine ganze Funktion* f *darstellt, und drücke* $f(x)$ *für* $x \geq 0$ *und* $x < 0$ *(formelmäßig) durch bekannte reelle Funktionen aus.*

3. *Man zeige, daß* $z \mapsto \dfrac{1}{2}\left(z + \dfrac{1}{z}\right)$ *die Kreislinie* $|z| = r$ *bijektiv auf die Ellipse* $\dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} = 1$ *mit den Halbachsen* $a = \frac{1}{2}(r + 1/r)$ *und* $b = \frac{1}{2}|r - 1/r|$ *abbildet. Der Ausnahmefall ist* $r = 1$*, das Bild ist hier das Intervall* $[-1, 1]$ *und die Abbildung ist nicht mehr injektiv.*

4. *(fortgesetzt) Man zeige, daß die Strahlen* $\arg z = \alpha$, $0 \le \alpha < 2\pi$, *auf die Hyperbeln* $\dfrac{u^2}{\cos^2\alpha} - \dfrac{v^2}{\sin^2\alpha} = 1$ *abgebildet werden; man bestimme die Ausnahmen von diese Regel.*

5. *(fortgesetzt) Man bestimme das Bild des Parallelstreifens* $0 < \operatorname{Re} z < \pi$ *unter der Abbildung* $z \mapsto \cos z$. *(Hinweis:* $\cos z = \frac{1}{2}(\zeta + \frac{1}{\zeta})$ *mit* $\zeta = e^{iz}$.*)*

6. *Man berechne sämtliche Werte* i^i.

7. *Die Gleichung* $\cos z = w$ *läßt sich in der Form* $e^{iz} + e^{-iz} = 2w$ *schreiben. Man bestimme ein Gebiet* D, *das* $(-1,1)$ *enthält und in welchem jede mit* arccos *bezeichnete Umkehrfunktion des Cosinus existiert.*

8. *(fortgesetzt) Man finde eine explizite Darstellung für diejenige Umkehrfunktion, die in* $(-1,1)$ *mit dem* reellen Arcuscosinus *übereinstimmt.*

9. *Man bilde den Dreiviertelkreisring* $1 < |z| < 2$, $0 < \arg z < \frac{3}{2}\pi$, *holomorph auf ein Rechteck ab.*

§ 6 Möbiustransformationen

Eine Funktion $T : \widehat{\mathbb{C}} \to \widehat{\mathbb{C}}$ der Form $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ mit $a,b,c,d \in \mathbb{C}$, $\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc \neq 0$, heißt Möbiustransformation. Man setzt für $c = 0$: $T(\infty) = \infty$ und für $c \neq 0$: $T(-d/c) = \infty$ und $T(\infty) = a/c$. Die Möbiustransformationen bilden bezüglich Komposition eine Gruppe, die Möbiusgruppe $\mathcal{M}$.

Satz *$\mathcal{M}$ wird erzeugt von den Translationen $z \mapsto z+a$, den Drehstreckungen $z \mapsto az$ $(a \neq 0)$, und der Inversion $z \mapsto 1/z$.*

$(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 = r^2$, komplex geschrieben $|z - z_0|^2 = r^2$, ist die Gleichung eines Kreises mit Mittelpunkt $z_0 = x_0 + iy_0$ und Radius $r > 0$, ausführlicher $z\overline{z} - \overline{z}_0 z - z_0\overline{z} + |z_0|^2 - r^2 = 0$.
Die Geradengleichung $a_1x + a_2y + a_3 = 0$ lautet komplex $\frac{1}{2}\big(a_1 - ia_2\big)z + \frac{1}{2}\big(a_1 + ia_2\big)\overline{z} + a_3 = 0$.
Beide Fälle umfasst die Schreibweise

$$\varepsilon z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} + \alpha = 0, \quad a \in \mathbb{C}, \alpha \in \mathbb{R};$$

beim Kreis ist $\varepsilon = 1$ und $|a|^2 > \alpha$, der Mittelpunkt ist $-a$, der Radius $\sqrt{|a|^2 - \alpha}$; bei der Geraden ist $\varepsilon = 0$ und $a \neq 0$. Für $|a| = 1$, ist dies die Hessesche Normalform, a ist der Normalenvektor und $|\alpha|/2$ der Abstand zu $z = 0$. Kreise und Geraden zusammen werden als Kreise auf $\widehat{\mathbb{C}}$ bezeichnet.

Satz *Möbiustransformationen sind winkeltreu und kreistreu: Ein Kreis auf $\widehat{\mathbb{C}}$ wird wieder auf einen Kreis auf $\widehat{\mathbb{C}}$ abgebildet.*

Für paarweise verschiedene $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \mathbb{C}$ heißt

$$(z_1, z_2, z_3, z_4) = \frac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3} : \frac{z_1 - z_4}{z_2 - z_4}$$

Doppelverhältnis von z_1, z_2, z_3, z_4. Man setzt noch $(\infty, z_2, z_3, z_4) = \lim\limits_{z_1 \to \infty} (z_1, z_2, z_3, z_4) = \dfrac{z_2 - z_4}{z_2 - z_3}$, und für $z_j = \infty$, $j = 2,3,4$, ergibt sich der Reihe nach $\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_4}$, $\dfrac{z_2 - z_4}{z_1 - z_4}$, $\dfrac{z_1 - z_3}{z_2 - z_3}$

Satz *Sind $z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ paarweise verschieden, so ist $T(z) = (z, z_2, z_3, z_4)$ die eindeutig bestimmte Möbiustransformation mit $T(z_2) = 1$, $T(z_3) = 0$ und $T(z_4) = \infty$. Die eindeutig bestimmte Möbiustransformation mit $T(z_2) = w_2, T(z_3) = w_3$ und $T(z_4) = w_4$ ist aus der Gleichung $(T(z), w_2, w_3, w_4) = (z, z_2, z_3, z_4)$ zu bestimmen (3-Punkte-Formel).*

Invarianz des Doppelverhältnisses *Für jede Möbiustransformation T und paarweise verschiedene Punkte $z_1, z_2, z_3, z_4 \in \widehat{\mathbb{C}}$ gilt*

$$\big(T(z_1), T(z_2), T(z_3), T(z_4)\big) = (z_1, z_2, z_3, z_4).$$

Folgerung 1 *Sind K und K' Kreise auf $\widehat{\mathbb{C}}$, so gibt es stets eine Möbiustransformation T, welche K auf K' abbildet: $T(K) = K'$*

Folgerung 2 *Das Doppelverhältnis (z_1, z_2, z_3, z_4) ist genau dann reell, wenn z_1, z_2, z_3, z_4 auf einem Kreis auf $\widehat{\mathbb{C}}$ liegen.* Ein

Kreis K auf $\widehat{\mathbb{C}}$ zerlegt $\widehat{\mathbb{C}}$ in zwei Gebiete D_1 und D_2 – Kreisinneres und -äußeres bzw. zwei Halbebenen. Mit analogen Bezeichnungen für das Bild $K' = T(K)$ unter einer gegebenen Möbiustransformation T gilt

Folgerung 3 *$T \in \mathcal{M}$ bilde K auf K' ab. Dann wird, bei passender Numerierung, D_1 auf D_1' und D_2 auf D_2' abgebildet.*

$\overline{z}$ ist der Spiegelpunkt von z an $\mathbb{R}$. Allgemein geht man so vor: Ist K ein Kreis auf $\widehat{\mathbb{C}}$ und T eine Möbiustransformation, welche K auf $\widehat{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ abbildet, so heißt $z_K^* = T^{-1}\Big(\overline{T(z)}\Big)$ Spiegelpunkt von z an K. Die Definition ist unabhängig von T. Doppelte Spiegelung führt zum Ausgangspunkt zurück: $(z_K^*)_K^* = z$.

Invarianz der Spiegelpunkte *Die Möbiustransformation T bilde den Kreis K auf K' ab. Dann gilt $T(z_K^*) = \big(T(z)\big)_{K'}^*$, d.h. unter T gehen Spiegelpunkte bezüglich K in Spiegelpunkte bezüglich $K' = T(K)$ über.*

Satz *Der Spiegelpunkt $z^* = z_K^*$ des Punktes z an $K : \varepsilon z\overline{z} + \overline{a}z + a\overline{z} + \alpha = 0$ genügt der Gleichung*

$$\varepsilon z^* \overline{z} + \overline{a} z^* + a\overline{z} + \alpha = 0.$$

Speziell für den Kreis $|z - z_0| = r$ erhält man explizit $z^* = z_0 + \frac{r^2}{\overline{z} - \overline{z}_0}$ und $z_0^* = \infty$.

Satz *Die den Kugeldrehungen (von S^2) entsprechenden Möbiustransformationen haben die Form $T(z) = \dfrac{az + b}{-\overline{b}z + \overline{a}}$.*

Eine Möbiustransformation $T(z) \not\equiv z$ hat einen oder zwei Fixpunkte z_0 bzw. z_1 und z_2.
Ist $z_0 = \infty$, also $T(z) = z + c$, $c \neq 0$, so gilt für die n-te Iterierte $T^n = T \circ T \circ \cdots \circ T$ (n-mal): $T^n(z) = z + nc \to \infty$ für $n \to \infty$. Ist $z_0 \neq \infty$ und $S(z_0) = \infty$, so gilt für die zu T konjugierte Transformation $S \circ T \circ S^{-1}(z) = z + c$; es folgt $T^n(z) \to z_0$ für $n \to \infty$. Transformationen dieser Art heißen parabolisch.
Im zweiten Fall ist T zu $\widetilde{T}(z) = S(T(S^{-1}(z))) = cz$ konjugiert (Fixpunkte 0 und ∞), wobei $0 < |c| \leq 1$. Ist $|c| < 1$, so gilt $\widetilde{T}^n(z) \to 0$ für $n \to \infty$ und $z \neq \infty$. Für T selbst bedeutet dies $T^n(z) \to z_1$ für $z \neq z_2$. Die Transformation T heißt hyperbolisch im Fall $0 < c < 1$ und loxodromisch sonst – es ist immer noch $|c| < 1$ vorausgesetzt. Im Fall $|c| = 1$ schließlich heißt T elliptisch. Für einen beliebigen Punkt $z \neq z_1, z_2$ bleibt die Folge $(T^n(z))$ auf der Kreislinie $\{w : |S(w)| = |S(z)|\}$.

Aufgaben zu §6

1. *Man bestimme das Bild von $|z - 1| < 1$ unter der Möbiustransformation $T(z) = \dfrac{z-1}{z}$.*

2. *(fortgesetzt) Dasselbe für die Halbebene* $\operatorname{Im} z > 1$.

3. *Man bestimme eine Möbiustransformation, welche* $0, i, 1$ *auf* $i, \infty, -1$ *abbildet.*

4. *Man bestimme alle Möbiustransformationen der oberen Halbebene auf sich.*

5. *Man bestimme das Bild des Quadrats* $0 < \operatorname{Re} z,\ \operatorname{Im} z < 1$, *unter* $T(z) = \dfrac{z-i}{1-z}$.

6. *Man bestimme eine Möbiustransformation, die den nichtkonzentrischen Kreisring* $\mathbb{D} \setminus \{z : |z - 1/2| \geq 1/4\}$ *auf einen konzentrischen Kreisring* $r < |w| < 1$ *abbildet;* r *ist nicht frei verfügbar und muß bestimmt werden!*

7. *Man bestimme eine Möbiustransformation, welche* $\mathbb{D}$ *auf sich und das Intervall* $[0, \rho]$, $0 < \rho < 1$, *auf* $[-r, r]$ *abbildet; für* r *gilt dasselbe wie in Nr. 6.*

8. *Man zeige, daß zwei aufeinanderfolgenden Spiegelungen an Kreisen* K *und* K' *eine Möbiustransformation entspricht:* $T(z) = \left(z_K^*\right)_{K'}^*$.

9. *(fortgesetzt) Wann ist* T *eine Ähnlichkeitstransformation* $z \mapsto az + b$?

10. *Man bestimme das Spiegelbild der Lemniskate* $|z^2 - 1| = 1$ *an der Einheitskreislinie.*

11. *Man zeige, daß die Möbiustransformationen* $T(z) = \dfrac{az+b}{-\bar{b}z+\bar{a}}$ *eine Gruppe bilden, ohne die Tatsache zu verwenden, daß sie gerade den Kugeldrehungen entsprechen.*

12. *Für eine Möbiustransformation* $T(z) = \dfrac{az+b}{cz+d}$ *mit* $ad - bc = 1$ *sei* $\delta(T) = (a+d)^2 - 4$. *Man zeige, daß* $\delta(T)$ *unter Konjugation invariant ist, d.h. es ist* $\delta(T) = \delta(S \circ T \circ S^{-1})$.
 (Hinweis: $a + d$ *ist die* Spur *der Matrix* $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$.*)*

13. *(fortgesetzt) Man zeige:* $T \neq \mathrm{id}$ *ist genau parabolisch bzw. elliptisch bzw. hyperbolisch, wenn* $\delta(T) = 0$ *bzw.* $-4 \leq \delta(T) < 0$ *bzw.* $\delta(T) > 0$ *gilt.*

§ 7 Elementare konforme Abbildungen

Unter einer konformen Abbildung versteht man eine bijektive und holomorphe Abbildung zwischen zwei Gebieten. In diesem Abschnitt werden einige elementare Abbildungsaufgaben gelöst.

(a) $\mathbb{D}$ **auf** $\mathbb{D}$. Lösung: $T(z) = e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $\quad a \in \mathbb{D}, \alpha \in \mathbb{R}$.

(b) $\mathbb{D}$ **auf die rechte Halbebene** $\operatorname{Re} z > 0$**.** Lösung: $T(z) = \dfrac{a + \bar{a}e^{i\alpha}z}{1 - e^{i\alpha}z}$, $\quad \operatorname{Re} a > 0, \alpha \in \mathbb{R}$.

(c) Parallelstreifen S **auf** $\mathbb{D}$. Nach Ausführung von $z \mapsto az + b$ kann man von $S = \{z : -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$ ausgehen. Mittels der Exponentialfunktion wird S auf die rechte Halbebene abgebildet, diese mittels einer Möbiustransformation auf $\mathbb{D}$.

(d) Winkelraum W **auf** $\mathbb{D}$. Wieder nach einer Ähnlichkeitstransformation kann man von $W = \{z : -\alpha/2 < \arg z < \alpha/2\}$ ausgehen. W wird mittels der Potenzabbildung $z \mapsto z^{\pi/\alpha}$ aufgebogen oder zusammengedrückt auf die rechte Halbebene.

(e) Die Koebefunktion $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$ ist rational vom Grad 2 und erfüllt die Gleichung $k(1/z) = k(z)$. Das Bildgebiet von $\mathbb{D}$ ist die aufgeschlitzte Ebene $k(\mathbb{D}) = \mathbb{C} \setminus \left(-\infty, -\frac{1}{4}\right]$.

(f) Parabeläußeres auf $\mathbb{D}$. $w = z^2$ ist eine konforme Abbildung der Halbebene $\operatorname{Im} z > c > 0$ auf das Parabeläußere $v^2 > 4c^2(c^2 + u)$; die Möbiustransformation $\zeta = \dfrac{z - 2ic}{z}$ bildet $\operatorname{Im} z > c$ auf $\mathbb{D}$ ab, somit ist $\zeta = 1 - \dfrac{2ic}{\sqrt{w}}$, $\operatorname{Im} \sqrt{w} > c > 0$, eine konforme Abbildung des Parabeläußeren $v^2 > 4c^2(c^2 + u)$ auf $\mathbb{D}$.

(g) Hyperbeläußeres auf $\mathbb{D}$. $w = z^2$ bildet das Hyperbelgebiet

$$\{z = x + iy : x > 0,\ y^2 < x^2 - c\}, \quad c > 0 \ \text{ fest},$$

konform auf die Halbebene $\operatorname{Re} w > c$ ab, und somit ist $\zeta = 1 - \dfrac{2c}{z^2}$ eine konforme Abbildung dieses Gebietes auf $\mathbb{D}$.

(h) Ellipsenäußeres auf $\mathbb{D}$. $w = z + 1/z$ bildet den Kreis $|z| = r$ bijektiv auf die Ellipse $\dfrac{u^2}{a^2} + \dfrac{v^2}{b^2} = 1$ ab, die Halbachsen sind $a = r + 1/r$ und $b = |r - 1/r|$; ausgenommen ist $r = 1$, wofür sich $v = 0$, $-2 \le u \le 2$, also das Intervall $[-2, 2]$ ergibt. Insbesondere ist $w = z + 1/z$ eine konforme Abbildung des Kreisäußeren $|z| > r > 1$ auf das Ellipsenäußere $\dfrac{u^2}{(r^2+1)^2} + \dfrac{v^2}{(r^2-1)^2} > \dfrac{1}{r^2}$ sowie von $\mathbb{C} \setminus \overline{\mathbb{D}}$ auf $\mathbb{C} \setminus [-2, 2]$.

Aufgaben zu §7

1. *Sind D und D' zwei verschiedene offene Kreisscheiben, deren Ränder sich in den Punkten a und b schneiden, so ist $D \setminus \overline{D'} = M$ ein Gebiet (*Möndchen*). Man bestimme ein Abbildung von M auf $\mathbb{D}$.*
   (Hinweis: Es ist zweckmäßig, zuerst das Bild von M unter $T(z) = \dfrac{z - a}{z - b}$ zu untersuchen.)

2. *Man bestimme das Bild des Halbstreifens $0 < \operatorname{Re} z < \pi$, $\operatorname{Im} z > 0$, unter der Abbildung $w = \tan z$.*
   (Hinweis: Man stelle $\tan z$ in der Form $T(e^{2iz})$ mit einer Möbiustransformation T dar.)

3. *Das Gebiet $\Delta = \{z : |z| > 1, \pi/4 < \arg z < 3\pi/4\}$ wird von $w = z + 1/z$ konform auf das von den oberen Hyperbelästen $u^2 - v^2 = 2$, $v > 0$, und dem Intervall $[-\sqrt{2}, \sqrt{2}]$ berandete Gebiet H abgebildet. Man bilde Δ konform auf $G = \{\zeta : \operatorname{Im} \zeta > 0, |\zeta| > 1\}$ ab.*

4. *(fortgesetzt) Man bestimme eine konforme Abbildung von H auf $\mathbb{D}$.*
   (Hinweis: Man bilde G mit $\zeta \mapsto \zeta + 1/\zeta$ weiter ab.)

Die wesentlichen Eigenschaften holomorpher Funktionen lassen sich alle aus einem einzigen Satz, dem Cauchyschen Integralsatz, ableiten. Die folgenden Paragraphen dienen dem Beweis dieses Satzes in seiner einfachsten Form sowie der Entwicklung der Anfänge der hieraus sich ergebenden lokalen Theorie.

---

§ 8 Komplexe Integration

Für eine stetige Funktion $f = u + iv : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$ setzt man $\int_a^b f(t)dt = \int_a^b u(t)dt + i \int_a^b v(t)dt$; es gelten die üblichen Regeln:

(i) $\int_a^b (f(t) + g(t))dt = \int_a^b f(t)dt + \int_a^b g(t)dt$; (ii) $\int_a^b cf(t)dt = c \int_a^b f(t)dt \quad (c \in \mathbb{C})$;

(iii) $\left| \int_a^b f(t)dt \right| \leq \int_a^b |f(t)|dt$; (iv) $\int_a^b f_n(t)dt \to \int_a^b f(t)dt$, wenn $f_n \to f$ gleichmäßig in $[a, b]$.

Ein Weg (oder auch Kurve) γ ist eine stetige Funktion $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{C}$. $\gamma(a)$ und $\gamma(b)$ heißen *Anfangs-* und *Endpunkt* von γ, $|\gamma| = \{\gamma(t) : a \leq t \leq b\}$ ist der Träger von γ.
$\alpha := -\gamma$ ist der Weg $\alpha(t) := \gamma(-t)$, $-b \leq t \leq -a$ (Orientierungsumkehr).

Für eine stetig differenzierbaren Weg γ und eine stetige Funktion $f : |\gamma| \longrightarrow \mathbb{C}$ definiert man das Kurvenintegral $\int_\gamma f(z)dz = \int_a^b f(\gamma(t))\gamma'(t)dt$

und das Integral nach der Bogenlänge $\int_\gamma f(z)|dz| = \int_a^b f(\gamma(t))|\gamma'(t)|dt$.

Die Regeln (i) – (iv) gelten analog. Hinzu kommen

(v) $\int_{-\gamma} f(z)dz = -\int_\gamma f(z)dz$, (vi) $\int_{-\gamma} f(z)|dz| = \int_\gamma f(z)|dz|$, und

(vii) $\left| \int_\gamma f(z)dz \right| \leq \int_\gamma |f(z)||dz| \leq M \int_\gamma |dz| = ML(\gamma)$ mit $M = \max_{z \in |\gamma|} |f(z)|$;

$L(\gamma) = \int_\gamma |dz|$ ist die Länge von γ.

Sind $\gamma_1 : [a_1, b_1] \to \mathbb{C}$ und $\gamma_2 : [a_2, b_2] \to \mathbb{C}$ Wege mit $\gamma_1(b_1) = \gamma_2(a_2)$, so ist $\gamma := \gamma_1 + \gamma_2$ gegeben durch $\gamma(t) := \gamma_1(t)$ für $a_1 \leq t \leq b_1$ und $\gamma(t) := \gamma_2(a_2 - b_1 + t)$ für $b_1 \leq t \leq b_1 + b_2 - a_2$. Diese Definition läßt sich auf endlich viele Summanden ausdehnen, $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$. Sind die Wege γ_j stetig differenzierbar, so nennt man γ einen Integrationsweg. Ein Integrationsweg heißt geschlossen, wenn Anfangs- und Endpunkt übereinstimmen. Für einen Integrationsweg γ und eine stetige Funktion $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ wird endgültig definiert

$$\int_\gamma f(z)dz = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)dz \quad \text{und} \quad \int_\gamma f(z)|dz| = \sum_{j=1}^m \int_{\gamma_j} f(z)|dz|.$$

Die Rechenregeln bleiben dann weiterhin gültig.

(a) Strecke von a nach b: $\gamma(t) = a + t(b - a)$, $0 \leq t \leq 1$. Die Schreibweise $\int_a^b f(z)dz$ bedeutet immer, daß über die Verbindungsstrecke von a nach b integriert wird.

(b) Ein Polygonzug oder Streckenzug durch die Punkte $a_0, \ldots, a_m$ ist die Summe der Strecken von a_{j-1} nach a_j, $1 \leq j \leq m$.

(c) Die Kreislinie $|z - z_0| = r$ wird stets durch $\gamma(t) = z_0 + re^{it}$, $0 \leq t \leq 2\pi$, (mathematisch positiv) parametrisiert, es wird oft $\int_{|z-z_0|=r} f(z)dz$ anstelle $\int_\gamma f(z)dz$ geschrieben.

(d) Beschreibt die Kurve γ den Rand eines „einfachen" Gebietes D, so schreibt man auch $\displaystyle\int_{\partial D} f(z)dz$ anstelle $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$.

Aufgaben zu §8

1. *Man zeige, daß ein Polygonzug auch eine stetig differenzierbare Parameterdarstellung besitzt (es genügt, zwei Strecken zu betrachten). Analytische Eigenschaften wie die stetige Differenzierbarkeit einer Parameterdarstellung besagen also nichts über geometrische Eigenschaften.*

2. *Man berechne das Kurvenintegral* $\int_\gamma |z|dz$

   (a) über die Strecke von 0 *nach* $1+i$,
   (b) über den Streckenzug von 0 *über* 1 *nach* $1+i$ *und*
   (c) über den Viertelkreisbogen $z = i + e^{it}$, $3\pi/2 \leq t \leq 2\pi$.

3. *Dasselbe für* $\int_\gamma z dz$ *und* $\int_\gamma \overline{z} dz$.

4. *Es sei* $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^z$ *für* $|z| < R$. *Man beweise die* Parsevalsche Formel:

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{|z|=r} |f(z)|^2 \, \frac{dz}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} |a_n|^2 r^{2n} \quad \text{für} \quad 0 \leq r < R.$$

§ 9 Der Cauchysche Integralsatz

Eine im Gebiet $D \subseteq \mathbb{C}$ erklärte Funktion F heißt Stammfunktion der in D stetigen Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, wenn sie in D holomorph ist und dort $F' = f$ erfüllt.

Satz *Für eine stetige Funktion* $f : D \to \mathbb{C}$, D *ein Gebiet, sind folgende Aussagen äquivalent:*

(i) f *besitzt eine Stammfunktion.*
(ii) $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$ *für jeden geschlossenen Integrationsweg im Gebiet* D.
(iii) $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz$ *hängt nur vom Anfangs- und Endpunkt des Integrationsweges* γ, $|\gamma| \subset D$, *ab.*

Lemma von Goursat *Ist* $\triangle$ *ein abgeschlossenes Dreieck,* $\partial\triangle$ *seine positiv orientierte Randkurve, und ist* f *holomorph in* $\triangle$, *so ist* $\displaystyle\int_{\partial\triangle} f(z)dz = 0$. *Die Aussage gilt auch dann noch, wenn* f *in* $\triangle$ *stetig und in* $\triangle \setminus \{a\}$ *holomorph ist.*

Cauchyscher Integralsatz *Für jede in* $D = \{z : |z - z_0| < r\}$ *holomorphe Funktion* f *und jeden geschlossenen Integrationsweg* γ *in* D *ist* $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0$.

Cauchysche Integralformel *Ist* f *holomorph in* $|z - z_0| \leq r$, *so gilt für* $|z - z_0| < r$

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} \, d\zeta.$$

Aufgaben zu §9

1. *Man zeige, daß* $f(z) = 1/z$ *in* $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ *keine Stammfunktion besitzt.*

2. *Man zeige, daß* e^{z^2} *in* $\mathbb{C}$ *eine Stammfunktion besitzt, ohne dazu den Cauchyschen Integralsatz zu bemühen.*

3. *(fortgesetzt) Man integriere* e^{z^2} *über den Dreiecksrand mit den Ecken* 0, $R > 0$ *und* iR, *und zeige, daß das Integral über die Strecke von* R *nach* iR *mit* $R \to +\infty$ *gegen* 0 *strebt.*

4. *(fortgesetzt) Man berechne die* Fresnelschen Integrale $\int\limits_0^\infty \cos x^2 dx$ *und* $\int\limits_0^\infty \sin x^2 dx$.

   (Hinweis: $\int\limits_0^\infty e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}/2$.*)*

5. *Man beweise den Cauchyschen Integralsatz in sternförmigen Gebieten. Dabei heißt ein Gebiet* D sternförmig *bezüglich* $z_0 \in D$, *wenn mit* z *auch die Verbindungsstrecke von* z_0 *nach* z *in* D *liegt.*

§ 10 Folgerungen aus der Cauchyschen Integralformel

Hilfssatz 1 *Ist* γ *ein Integrationsweg,* $E \subset \mathbb{C}$ *eine kompakte Menge und* $\psi : |\gamma| \times E \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig, so ist* $f(z) = \int_\gamma \psi(\zeta, z) d\zeta$ *stetig in* E.

Hilfssatz 2 *Ist* γ *ein Integrationsweg,* $\phi : |\gamma| \longrightarrow \mathbb{C}$ *stetig und* $n \in \mathbb{N}$, *so ist das* Cauchyintegral $F_n(z) = \int_\gamma \frac{\phi(\zeta)}{(\zeta - z)^n} d\zeta$ *holomorph in jeder Komponente von* $\widehat{\mathbb{C}} \setminus |\gamma|$, *es gilt dort* $F_n' = nF_{n+1}$.

Ist γ ein geschlossener Integrationsweg, so heißt $n(\gamma, a) = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{dz}{z - a}$ für $a \notin |\gamma|$ Umlaufzahl oder Index von γ bezüglich a.

Hilfssatz 3 *Die Umlaufzahl* $n(\gamma, a)$ *ist stets eine ganze Zahl. Als Funktion von* a *ist* $n(\gamma, a)$ *konstant in jeder Komponente von* $\mathbb{C} \setminus |\gamma|$, *und insbesondere* $n(\gamma, a) = 0$ *in der unbeschränkten Komponente.*

Cauchysche Integralformel für die Ableitung *Ist* f *holomorph in* $|z - z_0| \leq r$, *so gilt* $f^{(k)}(z) = \frac{k!}{2\pi i} \int\limits_{|\zeta - z_0| = r} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z)^{k+1}} d\zeta$ *für* $k = 1, 2, \ldots$ *und* $|z - z_0| < r$. *Insbesondere sind alle Ableitungen holomorph in* $|z - z_0| < r$.

Satz von Morera *Ist* f *stetig im Gebiet* D *und verschwindet* $\int_{\partial\triangle} f(z) dz$ *für jedes Dreieck* $\triangle \subset D$, *so ist* f *holomorph in* D.

Satz über Parameterintegrale *Ist* γ *ein Integrationsweg,* $D \subset \mathbb{C}$ *ein Gebiet,* $\psi : |\gamma| \times D \to \mathbb{C}$ *stetig und bei festem* $\zeta \in |\gamma|$ *holomorph bezüglich* $z \in D$, *so ist* $f(z) = \int_\gamma \psi(\zeta, z) d\zeta$ *holomorph in* D *und* $f'(z) = \int_\gamma \frac{\partial \psi}{\partial z}(\zeta, z) d\zeta$; $\frac{\partial \psi}{\partial z}$ *ist stetig in* $|\gamma| \times D$.

Satz *Ist* f *holomorph und nullstellenfrei in* $D = \{z : |z - z_0| < r\}$, *so existiert in* D *eine holomorphe Funktion* g *mit* $f(z) = e^{g(z)}$, *und bei gegebenem* $n \in \mathbb{N}$ *eine in* D *holomorphe Funktion* h *mit* $f(z) = (h(z))^n$. *Beide Funktionen sind eindeutig festgelegt durch ihren Wert in einem Punkt.*

Man nennt g bzw. h einen holomorphen Zweig des Logarithmus bzw. der n-ten Wurzel von f, und benutzt, wenn keine Mißverständnisse zu befürchten sind, die kurze Schreibweise $g(z) = \log f(z)$ bzw. $h(z) = \sqrt[n]{f(z)}$ anstelle der umständlichen $(\log f)(z)$ bzw. $(\sqrt[n]{f}\,)(z)$.

Sei $f = u + iv$ holomorph im Gebiet D. Dann sind $u, v \in C^\infty(D)$, und aus den Cauchy-Riemann-Gleichungen folgt $u_{xx} = v_{yx} = v_{xy} = -u_{yy}$, d.h. es ist $\Delta u = u_{xx} + u_{yy} = 0$, ebenso $\Delta v = 0$ in D. Δ ist der Laplaceoperator, und Funktionen $u \in C^2(D)$ mit $\Delta u = 0$ in D heißen harmonisch. Realteil u und Imaginärteil v einer holomorphen Funktion sind also harmonisch; v heißt zu u konjugiert harmonisch, demnach ist u zu $-v$ konjugiert harmonisch.

Satz *Ist u im Gebiet D harmonisch, so ist $u_x - iu_y$ holomorph in D. Ist $D : |z - z_0| < r$, so besitzt u in D eine konjugiert harmonische Funktion v; sie ist eindeutig bestimmt durch Festlegung in einem Punkt $z_1 \in D$.*

Aufgaben zu §10

1. *Man berechne die Umlaufzahl $n(\gamma, a)$, wenn γ der positiv orientierte Rand (a) eines Quadrates, (b) eines Rechtecks und (c) eines Dreiecks ist.*

2. *Man berechne die Integrale* $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\overline{z}}{z-a}\,dz$ *und* $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{\partial\mathbb{D}} \frac{\overline{z}^2}{z-a}\,dz$ *für $|a| < 1$ und $|a| > 1$.*

3. *Es sei* $f(z) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ *konvergent in $|z| < 1$. Man zeige*
$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|z|=r} \frac{f(z)}{(1-z)z^{n+1}}\,dz = a_0 + \cdots + a_n$$
für $n \in \mathbb{N}_0$ und $0 < r < 1$.

4. *Man berechne die Kurvenintegrale (a)* $\displaystyle\int\limits_{|z|=r} \frac{dz}{z^n(z-2r)}dz, \quad n \in \mathbb{N},\ r > 0;$ *(b)* $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \cot z dz;$

   (c) $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{e^z}{(z-a)(z-b)}dz, \quad |a|, |b| \neq 1;$ *(d)* $\displaystyle\int\limits_{|z|=1} \frac{z^n}{(z-a)^m}dz, \quad m, n \in \mathbb{N},\ |a| \neq 1.$

In den nachfolgenden Paragraphen wird die lokale Theorie *als Folgerung aus der Cauchyschen Integrationsformel entwickelt. Ihre Reichhaltigkeit wird durch die Stichworte Potenzreihenentwicklung, Nullstellenverteilung, Singularitäten, lokales Abbildungsverhalten, Analytizität der Umkehrfunktion, Maximumprinzip, Schwarzsches Lemma nur unzureichend beschrieben. Ausführlich wird die Klasse der eigentlichen Abbildungen diskutiert.*

---

§ 11 Die lokale Theorie

Potenzreihenentwicklung *Ist f holomorph im Gebiet D und $z_0 \in D$, so gilt*

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n \text{ in } |z-z_0| < \operatorname{dist}(z_0, \partial D),$$

wobei $a_n = \dfrac{f^{(n)}(z_0)}{n!} = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int\limits_{|z-z_0|=r} \dfrac{f(z)}{(z-z_0)^{n+1}} dz, \quad 0 < r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D).$

Cauchysche Koeffizientenungleichung *Für die Koeffizienten in der Potenzreihenentwicklung* $f(z) = \sum\limits_{n=0}^{\infty} a_n (z-z_0)^n$ *gilt*

$$|a_n| r^n \leq \max_{|z-z_0|=r} |f(z)| \quad \textit{für} \quad 0 < r < \operatorname{dist}(z_0, \partial D).$$

Satz von Liouville *Jede in $\mathbb{C}$ holomorphe und beschränkte Funktion ist konstant.*

Eine in $\mathbb{C}$ holomorphe Funktionen nennt man auch ganz.

Fundamentalsatz der Algebra *Jedes Polynom $p(z) = a_0 + \cdots + a_n z^n$ vom Grad $n \geq 1$ besitzt n Nullstellen $z_1, \ldots, z_n$, und damit die Darstellung $p(z) = a_n(z-z_1)\cdots(z-z_n)$. Die Nullstellen z_ν müssen nicht paarweise verschieden sein.*

$M \subset D$ heißt diskret im Gebiet D, wenn M keine Häufungspunkte in D hat. M ist dann höchstens abzählbar, und genau dann in D diskret, wenn es zu jedem $z_0 \in D$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $M \cap \{z : 0 < |z-z_0| < \delta\} = \emptyset$.

Nullstellensatz *Die Nullstellenmenge $N(f) = \{z \in D : \; f(z) = 0\}$ einer im Gebiet D holomorphen Funktion $f \not\equiv 0$ ist diskret in D.*

Identitätssatz *Sind f und g holomorph in D und gilt $f = g$ in einer nicht-diskreten Menge, so ist $f = g$ in D.*

Ist f holomorph in $0 < |z-z_0| < r$, so heißt z_0 isolierte Singularität; genauer heißt z_0 hebbare Singularität, wenn der endliche Grenzwert $\lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ existiert, Polstelle, wenn $\lim\limits_{z \to z_0} f(z) = \infty$ ist, und wesentliche Singularität sonst.

Riemannscher Hebbarkeitssatz *Gilt $\lim\limits_{z \to z_0} (z-z_0) f(z) = 0$, so ist z_0 hebbar, und die durch $f(z_0) = \lim\limits_{z \to z_0} f(z)$ fortgesetzte Funktion ist holomorph in z_0. Dies gilt insbesondere dann, wenn f in $0 < |z-z_0| < \delta$ beschränkt ist.*

Satz *Ist* $\lim\limits_{z\to z_0}(z-z_0)^m f(z) = c \neq 0$, *so ist* z_0 *eine Polstelle von* f *der Vielfachheit* m. *Es gilt dort* $f(z) = \sum\limits_{n=-m}^{\infty} a_n(z-z_0)^n, \quad a_{-m} = c \neq 0.$

Satz von Casorati-Weierstraß *Ist* z_0 *wesentliche Singularität von* f, *so gibt es zu jedem* $c \in \widehat{\mathbb{C}}$ *eine Folge* $z_n \to z_0$ *mit* $f(z_n) \to c$ *für* $n \to \infty$ *(*f *kommt in jeder Umgebung einer wesentlichen Singularität jedem Wert beliebig nahe).*

Eine im Gebiet D bis auf Polstellen holomorphe Funktion heißt in D meromorph. Polstellen liegen definitionsgemäß in D isoliert liegen, bilden somit eine diskrete Teilmenge von D.

Satz *Die einzigen auf* $\widehat{\mathbb{C}}$ *meromorphen Funktionen sind die rationalen.*

Aufgaben zu §11

1. *Man bestimme die Potenzreihenentwicklung von* $f(z) = (1+z)^\alpha = e^{\alpha \log(1+z)}$ $(\alpha \in \mathbb{C},\ f(0) = 1)$ *um den Nullpunkt.*
2. *Man zeige, daß durch* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} k^p z^k$, $p \in \mathbb{N}_0$, *in der Einheitskreisscheibe eine rationale Funktion dargestellt wird.*
3. *Gibt es eine in* $\mathbb{D}$ *holomorphe Funktion* f *mit einer der Eigenschaften*
   (a) $f(n^{-1}) = n^{-2}$ *(b)* $f(n^{-1}) = (-1)^n n^{-2}$ *(c)* $f(n^{-1}) = (n^2 + (-1)^n)^{-1}$ *für alle* $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$?
4. *Man bestimme und klassifiziere die Singularitäten von* $\dfrac{z}{\sin z}$ *und* $\dfrac{1}{e^z + e^{1/z}}$.
5. *Man zeige: Ist* f *eine ganze Funktion und gilt* $\max\limits_{|z|=r_k} |f(z)| \leq A r_k^m$ *für eine Radienfolge* (r_k) *mit* $r_k \to \infty$, *so ist* f *ein Polynom vom Grad höchstens* m.
6. *Man zeige: Ist* M *eine im Gebiet* D *diskrete Menge, so ist* $D \setminus M$ *ebenfalls ein Gebiet.*

§ 12 Das lokale Abbildungsverhalten

Hilfssatz (Spezielles Argumentprinzip) *Ist* f *holomorph in* $|z-z_0| \leq r$ *und* $f(z) \neq 0$ *auf* $|z-z_0| = r$, *so ist* $\dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_{|z-z_0|=r} \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$ *die Zahl der Nullstellen von* f *in* $|z-z_0| < r$.

Satz von der Gebietstreue *Ist* f *holomorph und nichtkonstant im Gebiet* D, *so ist* $f(D)$ *ein Gebiet.*

Satz über die Umkehrfunktion *Ist* f *holomorph im Gebiet* D, $f(z_0) = w_0$ *und* $f'(z_0) \neq 0$, *so besitzt* f *in* $W = \{w : |w - w_0| < \varepsilon\}$, *eine eindeutig bestimmte holomorphe Umkehrfunktion mit* $f^{-1}(w_0) = z_0$. *Es gilt die Formel von* Bürmann-Lagrange

$$f^{-1}(w) = \frac{1}{2\pi i} \int_{|z-z_0|=\delta} \frac{z f'(z)}{f(z) - w}\,dz \quad \text{in } W,$$

$\varepsilon > 0$ *und* $\delta > 0$ *sind geeignet zu wählen. Insbesondere ist* f *eine konforme Abbildung von* $U = f^{-1}(W)$ *(ein Gebiet um* z_0*) auf* W.

Hauptsatz über die lokale Abbildung *Ist f holomorph im Gebiet D, $f(z_0) = w_0$ und gilt $f^{(j)}(z_0) = 0$ für $0 < j < k$, aber $f^{(k)}(z_0) \neq 0$, so existiert eine (beliebig klein wählbare) Kreisscheibe $W = \{w : |w - w_0| < \varepsilon\}$, eine Kreisscheibe $V = \{\zeta : |\zeta| < \varepsilon^{1/k}\}$ und ein Gebiet $U \subseteq D$ mit $z_0 \in U$, sowie eine in U holomorphe Funktion h mit der Eigenschaft $h : U \xrightarrow{1:1} V$ und $f(z) = w_0 + (h(z))^k$ in U. Jedes $w \in W$ hat unter f genau k Urbilder im Gebiet U.*

Die letzte Aussage wird kurz mit $f : U \xrightarrow{k:1} W$ abgekürzt. Lokal verhält sich also f wie die Abbildung $z \mapsto w_0 + c(z - z_0)^k$, $c \neq 0$.

Aufgaben zu §12

1. *Man bestimme eine möglichst große Kreisscheibe $|w| < r$, in der $z \mapsto \sin z$ eine Umkehrfunktion besitzt, die 0 auf 0 abbildet.*
2. *Dasselbe für $z \mapsto \tan z$.*
3. *Es sei f holomorph in $z = 0$ mit $f(0) = 0$ und $f'(0) = 1$, und $k \geq 2$ sei ganz. Man zeige, daß es eine in $z = 0$ holomorphe Funktion g gibt mit $g(0) = 0$, $g'(0) = 1$ und $f(z^k) = (g(z))^k$.*
4. *(fortgesetzt) Man zeige $g(ze^{2\pi i/k}) = e^{2\pi i/k} g(z)$.*
5. *(fortgesetzt) Man zeige: Ist f eine konforme Abbildung von D, so auch g.*
6. *(fortgesetzt) Man berechne g für $f(z) = z(1 - z)^{-2}$ und $g(\mathbb{D})$.*
   (Hinweis: $\partial g(\mathbb{D}) = g(\partial \mathbb{D})$.)

§ 13 Das Maximumprinzip

Maximumprinzip [1. Fassung] *Der Betrag einer in einem Gebiet D holomorphen und nichtkonstanten Funktion f hat in D keine lokale Maxima, und lokale Minima nur in ihren Nullstellen.*

Maximumprinzip [2. Fassung] *Ist f holomorph und nichtkonstant im Gebiet D, und gilt $\limsup\limits_{z \to \zeta} |f(z)| \leq M$ für jeden Randpunkt ζ, so ist $|f(z)| < M$ in D.*

Folgerung *Ist f holomorph und nichtkonstant im beschränkten Gebiet D, und stetig in $\overline{D}$, so gilt $|f(z)| < \max\limits_{\partial D} |f(\zeta)|$ in D. Speziell für $D = \{z : |z| < R\}$ ist der Maximalbetrag $M(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$, $0 \leq r < R$, streng monoton wachsend.*

Lemma von Schwarz *Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph und $f(0) = 0$, so gilt $|f(z)| \leq |z|$ und $|f'(0)| \leq 1$, und Gleichheit, d.h. $|f(z_0)| = |z_0|$ für ein $z_0 \neq 0$ oder $|f'(0)| = 1$, ist nur möglich für eine Drehung $f(z) = e^{i\alpha} z$.*

Lemma von Schwarz-Pick *Ist $f : \mathbb{D} \to \mathbb{D}$ holomorph, so gilt entweder $\left|\dfrac{f(z) - f(\zeta)}{1 - \overline{f(\zeta)} f(z)}\right| < \dfrac{|z - \zeta|}{|1 - \bar{\zeta} z|}$ für $z \neq \zeta$, und $\dfrac{|f'(\zeta)|}{1 - |f(\zeta)|^2} < \dfrac{1}{1 - |\zeta|^2}$, oder es ist $f(z) = e^{i\alpha} \dfrac{z - a}{1 - \bar{a}\, z}$ mit $\alpha \in \mathbb{R}$, $|a| < 1$. Dann gilt statt $<$ immer $=$.*

Ungleichung von Borel-Caratheodory *Sei f holomorph in $|z| < R$, $f(0) = 0$ und $\operatorname{Re} f(z) \leq A$. Dann gilt $|f(z)| \leq \dfrac{2A|z|}{R - |z|}$.*

Satz *Die konformen Selbstabbildungen von $\mathbb{D}$ bilden bzgl. der Komposition $\circ$ eine Gruppe, die* konforme Automorphismengruppe Aut $(\mathbb{D})$. *Sie besteht aus den Möbiustransformationen* $z \mapsto e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$.

Drei Geometrien

(a) **Die euklidische** oder auch **parabolische Geometrie** Die Ebene ist $E = \mathbb{C}$, die Punkte P sind die komplexen Zahlen, Abstände werden euklidisch gemessen, die kürzesten Verbindungskurven (Geodätischen) sind die Strecken, ihre Verlängerungen die Geraden. Die Bewegungen sind die Möbiustransformationen $z \mapsto az + b$, $|a| = 1$. Es gilt das Parallelenaxiom; die Winkelsumme im Dreieck ist $= \pi$.

(b) **Die Kugelgeometrie** oder auch **elliptische Geometrie** Die Ebene ist $\widehat{\mathbb{C}}$, die Punkte sind die komplexen Zahlen und ∞, Abstände werden in der chordalen Metrik gemessen, die Geodätischen sind die Bögen auf den Großkreisen, den Geraden dieser Geometrie. Ihre Bewegungen sind die Kugeldrehungen $z \mapsto \dfrac{az+b}{-\overline{b}z+\overline{a}}$. Das Parallelenaxiom gilt nicht, keine Gerade besitzt eine Parallele; die Winkelsumme im Dreieck ist $> \pi$.

(c) **Die hyperbolische Geometrie** Die Ebene ist $\mathbb{D}$, die Punkte sind die komplexen Zahlen in $\mathbb{D}$, Abstände werden in der Poincaré-Metrik gemessen,

$$d(a,b) = \inf_{\gamma}\Big\{\int_\gamma \frac{2|dz|}{1-|z|^2}\Big\} = \int_{C(a,b)} \frac{2|dz|}{1-|z|^2} = \log\frac{1+w(a,b)}{1-w(a,b)} \quad \text{mit} \quad w(a,b) = \Big|\frac{b-a}{1-\overline{a}b}\Big|.$$

Das Infimum wird gebildet über alle Intergrationswege γ, die a mit b in $\mathbb{D}$ verbinden. Die Geodätischen sind die Bögen $C(a,b)$ auf den Kreisen orthogonal zu $\partial\mathbb{D}$, den Geraden dieser Geometrie. Die Bewegungen (Kongruenzabbildungen) sind die Möbiustransformationen $z \mapsto e^{i\alpha}\dfrac{z-a}{1-\overline{a}z}$. Das Parallelenaxiom gilt nicht, jede Gerade besitzt unendlich viele Parallelen; die Winkelsumme im Dreieck ist $< \pi$.

Aufgaben zu §13

1. *Es sei $\mathcal{P}$ die Klasse der in $\mathbb{D}$ holomorphen Funktionen p mit positivem Realteil und $p(0) = 1$. Man zeige* $|p(z)| \le \dfrac{1+|z|}{1-|z|}$.
   (Hinweis: $T(z) = \dfrac{1-z}{1+z}$ bildet die rechte Halbebene auf $\mathbb{D}$ und 1 auf 0 ab.)
2. *(fortgesetzt) Man zeige $|p'(0)| \le 2$.*
3. *Man zeige, daß mit $p(z) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k z^k$ auch $q(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} p\big(e^{2\nu\pi i/n}\sqrt[n]{z}\,\big)/n$ zu $\mathcal{P}$ gehört, und folgere $|a_n| \le 2$.*

§ 14 Harmonische und subharmonische Funktionen

Das Maximumprinzip gilt für eine weit größere Funktionenklasse, die der (stetigen) subharmonischen Funktionen $v : D \to \mathbb{R}$, D ein Gebiet: Sie sind stetig, und zu jedem $z_0 \in D$ gibt es einen Radius $r_0 = r_0(z_0) > 0$, so daß die Mittelwertungleichung $v(z) \le \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} v(z_0 + re^{i\theta})d\theta$ für $0 < r < r_0$ gilt.

Maximumprinzip [für subharmonische Funktionen] *Ist v subharmonisch im Gebiet D und gilt $\limsup\limits_{z\to\zeta} v(z) \le M$ für alle $\zeta \in \partial D$, so ist entweder $v(z) < M$ in D oder $v(z) = M$ in D.*

Satz *Jede harmonische Funktion u erfüllt in jedem Gebietspunkt die Gaußsche Mittelwertformel $u(z_0) = \dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi} u(z_0 + re^{i\theta})d\theta$; sie gilt für $0 \le r <$ dist $(z_0, \partial D)$.*

Maximum-Minimum-Prinzip [für harmonische Funktionen] *Ist u harmonisch im Gebiet D und gilt* $\limsup_{z\to\zeta} u(z) \le M$ *bzw.* $\liminf_{z\to\zeta} u(z) \ge m$ *für jeden Randpunkt* ζ, *so ist u entweder konstant oder es ist* $u(z) < M$ *bzw.* $u(z) > m$ *in D.*

Poissonintegraldarstellung *Jede in* $\overline{\mathbb{D}}$ *harmonische Funktion läßt sich in* $\mathbb{D}$ *in Form eines Poissonintegrals*

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})u(e^{i\theta})d\theta$$

darstellen. Dabei ist $P(e^{i\theta}, z) = \mathrm{Re}\left(\frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}\right) = \frac{1-|z|^2}{|e^{i\theta}-z|^2}$ *der* Poissonkern.

Formel von Schwarz *Jede in* $\overline{\mathbb{D}}$ *holomorphe Funktion* $f = u + iv$ *läßt sich in* $\mathbb{D}$ *in der Form*

$$f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \frac{e^{i\theta}+z}{e^{i\theta}-z}u(e^{i\theta})d\theta + iv(0)$$

darstellen; $\frac{\zeta+z}{\zeta-z}$, $|z| < 1 = |\zeta|$, *ist der* komplexe Poissonkern.

Aufgaben zu §14

1. *Es sei u zweimal stetig differenzierbar im Kreisring* $\mathcal{R} : r_1 < |z| < r_2$ *und* $\overline{u}(r,\theta) = u(re^{i\theta})$. *Man zeige* $\Delta u = \overline{u}_{rr} + \frac{1}{r}\overline{u}_r + \frac{1}{r^2}\overline{u}_{\theta\theta} = \frac{1}{r}\left(r\overline{u}_r\right)_r + \frac{1}{r^2}\overline{u}_{\theta\theta}$.
2. *(fortgesetzt) Man bestimme alle rotationssymmetrischen harmonischen Funktionen im Kreisring* $\mathcal{R}$, *d.h. alle in* $\mathcal{R}$ *harmonischen Funktionen der Form* $u(z) = h(|z|)$, $h \in C^2(r_1, r_2)$.
3. *(fortgesetzt) Man zeige: Ist u harmonisch in* $\mathcal{R}$, *so hat der Mittelwert die Form* $m(r) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} u(re^{i\theta})d\theta = a + b\log r$.
(Hinweis: Man berechne $\frac{d}{dr}\left(r\frac{d}{dr}m(r)\right)$ *.)*
4. *Man berechne* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})d\theta$.
5. *Genauso* $\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} P(z, e^{i\theta})e^{2i\theta}d\theta$.

§ 15 Eigentliche Abbildungen

Eine holomorphe Funktion $f : D \longrightarrow G$ (D und G Gebiete) heißt eigentliche Abbildung, wenn jedes $w \in G$ gleichviele (und endlich viele) Urbilder in D hat. Man nennt die Zahl k der Urbilder den Grad von f, $\deg f = k$ und schreibt

$$f : D \xrightarrow{k:1} G.$$

Die eigentlichen Abbildungen vom Grad 1 sind gerade die konformen.

Hauptsatz für eigentliche Abbildungen *Für eine holomorphe Funktion* $f : D \to G$ *(D und G Gebiete) sind folgende Aussagen äquivalent:*
(a) $f : D \longrightarrow G$ *ist eine eigentliche Abbildung.*
(b) Urbilder kompakter Mengen $K \subset G$ *sind kompakt.*
(c) Es gilt $f(z) \to \partial G$ *für* $z \to \partial D$.

Dabei bedeutet (c), daß für jede Folge (z_n) in D mit $z_n \to z_0 \in \partial D$ sämtliche Häufungswerte der Folge $(f(z_n))$ auf ∂G liegen. Ist f auf ∂D stetig, so heißt dies einfach $f(\partial D) \subseteq \partial G$.

Folgerung *Jede konforme Abbildung $f: D \to G$ bildet Rand auf Rand ab, d.h. es gilt $f(z) \to \partial G$ für $z \to \partial D$.*

Satz *Die eigentlichen Selbstabbildungen von $\mathbb{D}$ sind die (endlichen)* Blaschkeprodukte
$f(z) = e^{i\alpha} \prod_{j=1}^{k} \frac{z - a_j}{1 - \bar{a}_j z} \quad (|a_j| < 1).$

Satz *Die Gruppe* Aut $(\mathbb{D})$ *der konformen Selbstabbildungen von $\mathbb{D}$ besteht aus den Möbiustransformationen $z \mapsto e^{i\alpha} \dfrac{z-a}{1-\bar{a}z}$, $\quad \alpha \in \mathbb{R}$ und $\ |a| < 1$.*

Satz *Die eigentlichen Selbstabbildungen der Ebene sind die nichtkonstanten Polynome. Die Gruppe* Aut $(\mathbb{C})$ *der konformen Selbstabbildungen von $\mathbb{C}$ besteht aus den Ähnlichkeitstransformationen $z \mapsto az + b$, $a \neq 0$.*

Satz *Die rationalen Funktionen sind gerade die eigentlichen Selbstabbildungen von $\widehat{\mathbb{C}}$, und* Aut $(\widehat{\mathbb{C}})$ *ist die Möbiusgruppe.*

Satz *Ist $f: D \xrightarrow{k:1} G$ eine eigentliche Abbildung, und sind D und G endlich zusammenhängend, so existiert zu jeder Komponente A von $\widehat{\mathbb{C}} \backslash D$ genau eine Komponente B von $\widehat{\mathbb{C}} \backslash G$ mit $f(z) \to B$ für $z \to A$. Umgekehrt existiert zu jedem B wenigstens eine derartige Komplementärkomponente A.*

Hat D die Komplementärkomponenten $A_1, \ldots, A_m$ und G die Komplementärkomponenten $B_1, \ldots, B_n$, so hat B_ν ein oder mehrere Urbilder unter den A_j, sie sind von den Urbildern von B_μ verschieden. Somit induziert eine eigentliche Abbildung eine surjektive Abbildung von $\{A_1, \ldots, A_m\}$ auf $\{B_1, \ldots, B_n\}$. Es gilt damit $n \leq m \leq kn$.

Zwei Gebiete D und G heißen konform äquivalent, wenn es eine konforme Abbildung $f: D \to G$ gibt.

Invarianz der Zusammenhangszahl *Konform äquivalente Gebiete haben dieselbe Zusammenhangszahl.*

Satz *Eigentliche Abbildungen eines Kreisrings $\mathcal{A}_r$ auf einen Kreisring $\mathcal{A}_R$ gibt es nur im Fall $R = r^k$, k ganz. In diesem Fall haben sie die Form $f(z) = e^{i\alpha} z^k \quad$ oder $\quad f(z) = e^{i\alpha} \left(\dfrac{r}{z}\right)^k$.*

Satz *Zwei verschiedene Kreisringe $\mathcal{A}_r$ und $\mathcal{A}_R$ sind nicht konform äquivalent. Die konforme Automorphismengruppe* Aut $(\mathcal{A}_r)$ *besteht aus den Abbildungen $f(z) = ze^{i\alpha}$ und $f(z) = e^{i\alpha} \dfrac{r}{z}$, $\ \alpha \in \mathbb{R}$.*

Aufgaben zu §15

1. *Man zeige, daß $f(z) = z^2$ eine surjektive, aber keine eigentliche Abbildung von $\mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ auf $\mathbb{C} \setminus \{0\}$ ist.*

2. *Man zeige: Ist $f: D \longrightarrow G$ eine eigentliche Abbildung, G^* ein Teilgebiet von G und D^* eine Komponente von $f^{-1}(G^*)$, so ist auch $f: D^* \longrightarrow G^*$ eigentlich.*

3. *Man bestimme alle eigentlichen Selbstabbildungen der punktierten Ebene $\mathbb{C}^* = \mathbb{C} \setminus \{0\}$.*

4. *Die Funktion $-c(z-\xi)^{-1}$, $c > 0$ und ξ reell, hat für* Im $z > 0$ *positiven Imaginärteil. Man zeige, daß eine rationale Funktion f mit* Im $f(z) > 0$ *für* Im $z > 0$ *und* Im $f(z) < 0$ *für* Im $z < 0$ *die Form $c + c_0 z - \sum\limits_{j=1}^{n} c_j (z - \xi_j)^{-1}$ hat, wobei $c \in \mathbb{R}$, $c_j \geq 0$, ξ_j reell und $\sum\limits_{j=0}^{n} c_j > 0$ ist. Diese Funktionen sind also eigentliche Selbstabbildungen der oberen Halbebene $\mathbb{H}$.*

5. (fortgesetzt) *Man zeige, daß es die einzigen eigentlichen Selbstabbildungen der oberen Halbebene sind. (Hinweis: Eine Möbiustransformation $T : \mathbb{H} \longrightarrow \mathbb{D}$ verwandelt eine eigentliche Selbstabbildung f von $\mathbb{H}$ in eine eigentliche Selbstabbildung $T \circ f \circ T^{-1}$ von $\mathbb{D}$.)*

6. *Man zeige, daß die Joukowskyabbildung $f(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right)$ eine $(2:1)$-Abbildung des Kreisrings $D = \{z : r < |z| < 1/r\}$, $r \in (0,1)$, auf ein einfach zusammenhängendes Gebiet G, das Innere einer Ellipse $\frac{u^2}{a^2} + \frac{v^2}{b^2} = 1$, ist.*

7. *Man beweise den Fundamentalsatz der Algebra durch den Nachweis, daß ein nichtkonstantes Polynom eine eigentliche Selbstabbildung der Ebene ist.*

Die folgenden Paragraphen haben die Untersuchung von Folgen holomorpher Funktionen im weitesten Sinn zum Inhalt. Der zentrale Satz ist der Weierstraßsche Konvergenzsatz für Funktionenfolgen, an den sich die Untersuchung von unendlichen Reihen und Produkten sowie eigentlichen und uneigentlichen Parameterintegralen anschließt. Den Funktionen Γ und ζ ist ein eigener Paragraph gewidmet.

§ 16 Folgen holomorpher Funktionen

Die lokal gleichmäßige Konvergenz einer Folge (f_n) holomorpher Funktionen führt dazu, daß sich, anders als im Reellen, viele Eigenschaften der Funktionen f_n auf die Grenzfunktion übertragen.

Konvergenzsatz von Weierstraß *Sind die Funktionen f_n holomorph im Gebiet D und konvergiert die Folge (f_n) gegen f, lokal gleichmäßig in D, so ist auch f holomorph in D, und es gilt $f_n^{(k)} \to f^{(k)}$, lokal gleichmäßig in D, für $k = 1, 2, \ldots$.*

Folgerung *Ist f_n holomorph im Gebiet D und stetig auf $\overline{D}$, und konvergiert die Folge (f_n) gleichmäßig auf ∂D, so konvergiert sie gleichmäßig in D gegen eine holomorphe Grenzfunktion.*

Satz von Hurwitz (I) *Konvergiert die Folge (f_n) holomorpher Funktionen im Gebiet D lokal gleichmäßig gegen die Grenzfunktion f, und hat jedes f_n höchstens k Nullstellen in D (mit Vielfachheiten gezählt), so hat auch f höchstens k Nullstellen in D, oder es ist $f \equiv 0$.*

Ist $f \not\equiv 0$ und z_0 eine Nullstelle von f, so gibt es eine Folge $z_n \to z_0$ mit $f_n(z_n) = 0$ für $n \geq n_0$. Die Nullstellen von f sind gerade die Häufungspunkte der Nullstellen sämtlicher f_n.

Satz von Hurwitz (II) *Sind alle Funktionen f_n konforme Abbildungen des Gebietes D, und gilt $f_n \to f$, lokal gleichmäßig in D, so ist auch f eine konforme Abbildung, oder aber konstant.*

Ist f nicht konstant und liegt w in $f(D)$, so gehört w auch zu fast allen $f_n(D)$.

Es sei D ein Gebiet und $\mathcal{F}$ eine Menge (Familie) von stetigen Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Die Familie $\mathcal{F}$ heißt normal, wenn jede Folge in $\mathcal{F}$ eine lokal gleichmäßig konvergente Teilfolge enthält.

Satz *Es sei $\mathcal{F}$ eine Familie stetiger Funktionen $f : D \longrightarrow \mathbb{C}$. Besitzt jeder Punkt z_0 im Gebiet D eine (Kreis-)Umgebung $D(z_0) \subset D$, in welcher die Familie $\mathcal{F}_{D(z_0)} = \{f|_{D(z_0)} : f \in \mathcal{F}\}$ normal ist, so ist $\mathcal{F}$ normal in D.*

Eine Familie $\mathcal{F}$ heißt gleichgradig stetig, wenn es zu jedem $\varepsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so daß $|f(z_1) - f(z_2)| < \varepsilon$ für alle $z_1, z_2 \in D$ mit $|z_1 - z_2| < \delta$ und alle $f \in \mathcal{F}$ gilt. Lokal gleichgradig stetig bedeutet dann, daß jedes $z_0 \in D$ eine (Kreis-)Umgebung $D(z_0) \subset D$ besitzt, so daß $\mathcal{F}_{D(z_0)}$ gleichgradig stetig ist.

Satz von Arzela-Ascoli *Jede lokal gleichgradig stetige und in einem Punkt beschränkte Familie ist normal.*

Satz von Montel *Jede lokal beschränkte Familie holomorpher Funktionen ist normal.*

Satz von Vitali *Ist (f_n) im Gebiet D eine normale Folge holomorpher Funktionen, die in einer nicht-diskreten Teilmenge von D punktweise konvergiert, so konvergiert sie lokal gleichmäßig in D.*

Aufgaben zu §16

1. *Es sei* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *eine konforme Abbildung der Einheitskreisscheibe und* $0 < r < 1$. *Man zeige, daß fast alle Partialsummen* $s_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k z^k$ *konforme Abbildungen der Kreisscheibe* $|z| < r$ *sind.*

2. *Man zeige, daß die* Exponentialpolynome $\sum_{\nu=0}^{n} a_\nu e^{i\lambda_\nu z}$: $a_\nu \in \mathbb{C}$, $\sum_{\nu=0}^{n} |a_\nu| \le 1$ *und* $\lambda_\nu \ge 0$ *(n ist variabel) in der oberen Halbebene eine normale Familie* $\mathcal{F}$ *bilden. Wie sehen die Grenzfunktionen aus?*

3. *Man beweise den Satz von Montel für harmonische Funktionen; aus der lokalen Poissonintegraldarstellung ist ein Abschätzung für den Gradienten abzuleiten.*

§ 17 Unendliche Produkte

Ist (a_k) eine Folge in $\mathbb{C} \setminus \{0\}$, so heißt das unendliche Produkt $p = \prod_{k=1}^{\infty} a_k$ konvergent, wenn der Grenzwert $p = \lim_{n\to\infty} p_n$ der Folge der Partialprodukte $p_n = \prod_{k=1}^{n} a_k$ existiert und $\neq 0$ ist; dieser Grenzwert ist zugleich der Wert des Produktes. Notwendig, aber nicht hinreichend, für die Konvergenz ist die Bedingung $a_k \to 1$. Mit der zusätzlichen Forderung $p \neq 0$ rettet man den Satz über die Nullteilerfreiheit. Ausdehnung der Definition: Das unendliche Produkt $\prod_{k=1}^{\infty} a_k$ heißt konvergent mit Wert $p = \lim_{n\to\infty} p_n$, wenn für $k \ge k_0$ alle $a_k \neq 0$ sind und das Produkt $\prod_{k=k_0}^{\infty} a_k$ im obigen Sinn konvergiert.

Das unendliche Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$ heißt absolut konvergent wenn das Produkt $\prod_{k=1}^{\infty}(1+|b_k|)$ konvergiert.

Satz *Das Produkt* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$ *ist genau dann absolut konvergent, wenn die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}|b_k|$ *konvergiert. Aus der absoluten Konvergenz folgt die Konvergenz.*

Der Wert eines absolut konvergenten Produktes ist von der Reihenfolge der Faktoren unabhängig.

Sind $u_1, u_2, \dots$ im Gebiet D holomorphe Funktionen, alle $u_k(z) \not\equiv -1$, so heißt das unendliche Produkt (*) $\prod_{k=1}^{\infty}(1+u_k(z))$ lokal gleichmäßig konvergent, wenn (es punktweise konvergiert und wenn) die Folge (p_n) der Partialprodukte $p_n(z) = \prod_{k=1}^{n}(1+u_k(z))$ lokal gleichmäßig konvergiert.

Satz *Konvergiert die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty} u_k(z)$ *absolut und lokal gleichmäßig in* D *, so konvergiert auch das unendliche Produkt (*) (absolut und) lokal gleichmäßig.*

Aus dem Weierstraß schen Konvergenzsatz folgt noch, daß die Reihe der logarithmischen Ableitungen $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{u_k'(z)}{1+u_k(z)}$ lokal gleichmäßig in D konvergiert; auszunehmen sind die Nullstellen der einzelnen Faktoren.

Blaschkeprodukte Gegeben eine Folge (a_k) in $\mathbb{D} \setminus \{0\}$, gesucht eine in $\mathbb{D}$ holomorphe Funktion mit genau den Nullstellen a_k.

Lösung: Das Blaschkeprodukt $B(z) = \displaystyle\prod_{k=1}^{\infty} \frac{\overline{a_k}}{|a_k|} \frac{a_k - z}{1 - \overline{a_k} z}$, unter der

Blaschkebedingung $\sum_{k=1}^{\infty}(1-|a_k|) < \infty$.

Aufgaben zu §17

1. *Man zeige: Notwendig und hinreichend für die Konvergenz des Produktes* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$ *ist die Konvergenz von* $\sum_{k=1}^{\infty}\log(1+b_k)$, *wobei* $|\arg(1+b)|<\pi/2$ *für* $|b|<1$ *gewählt wird.*

2. *Man zeige, daß* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+(-1)^{k-1}/k)$ *divergiert.*

3. *Es sei* $b_k=\exp((-1)^k/\sqrt{k})-1$. *Man zeige, daß das Produkt* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$ *konvergiert, nicht aber die Reihe* $\sum_{k=1}^{\infty}b_k$.

4. *Man zeige: Konvergieren die Reihen* $\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{\nu}$ *für* $\nu=1,\dots,p-1$, *und sogar absolut für* $\nu=p$, *so konvergiert auch* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$.

5. *(fortgesetzt) Es sei* $\omega=e^{2\pi i/(p+1)}$, $p\in N$, *und* $b_k=\omega^k k^{-1/(p+1)}$. *Man zeige, daß* $\prod_{k=1}^{\infty}(1+b_k)$ *divergiert, obwohl die Reihen* $\sum_{k=1}^{\infty}b_k^{\nu}$ *für* $1\le\nu\le p$ *konvergieren.*
   (Hinweis: Die Partialsummen $\sum_{k=1}^{n}\omega^{\nu k}$ *sind beschränkt für* $1\le\nu\le p$,

6. *Man zeige: Ist* (n_k), $n_k\ge 2$, *eine streng monoton wachsende Folge ganzer Zahlen, so konvergiert das Produkt* $\prod_{k=1}^{\infty}\left(1+n_k^{-z}\right)$ *absolut in der Halbebene* $\mathrm{Re}\ z>1$, *und gleichmäßig in* $\mathrm{Re}\ z\ge 1+\delta$, $\delta>0$ *beliebig.*
   (Hinweis: Es ist $n^{-z}=e^{-z\log n}$ *und* $\log n$ *reell.)*

7. *Man zeige, daß die Blaschkebedingung für die Konvergenz eines Blaschkeproduktes auch* notwendig *ist.*
   (Hinweis: Man untersuche den Punkt $z=0$.*)*

8. *Man zeige, daß das mit den Nullstellen* $a_k=(1-k^{-2})e^{ik\pi\sqrt{2}}$ *gebildete Blaschkeprodukt* B *in jedem Randpunkt* $\liminf_{z\to\zeta}|B(z)|=0$ *erfüllt.*

§ 18 Der Produktsatz von Weierstraß

Eine ganze und nullstellenfreie Funktion f hat die Form $f=e^g$ mit einer ganzen Funktion g. Hat f die Nullstellen $z=0$ (m-fach) und $z=a_1,\dots,a_n$ (alle $\neq 0$), jede Stelle entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeschrieben, so ist $f(z)=z^m(z-a_1)\cdots(z-a_n)e^{g(z)}$, g eine ganze Funktion.

Für $p\in\mathbb{N}$ heißt $E(u,p)=(1-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\cdots+\frac{u^p}{p}\right)$ Weierstraßscher Primfaktor, für $p=0$ wird $E(u,0)=1-u$ gesetzt.

Hilfssatz *Für* $|u|\le 1/2$ *und* $p=0,1,2,\dots$ *gilt* $|E(u,p)-1|\le 2|u|^{p+1}$.

Produktsatz von Weierstraß *Zu gegebener Folge* (a_n), $a_n\neq 0$ *und* $a_n\to\infty$, *gibt es* $p_n\in\mathbb{N}_0$, *so daß das unendliche Produkt*

$$\prod_{n=1}^{\infty}E\Big(\frac{z}{a_n},p_n\Big)$$

absolut und lokal gleichmäßig in $\mathbb{C}$ *konvergiert, demnach eine ganze Funktion mit genau den Nullstellen* a_n *darstellt.*

Es reicht aus p_n so zu wählen, daß die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \left|\frac{R}{a_n}\right|^{p_n+1}$ für jedes $R > 0$ konvergiert.

Folgerung 1 *Jede ganze Funktion f besitzt eine Darstellung der Form $f(z) = z^m e^{g(z)} P(z)$; dabei ist $m \geq 0$ die Nullstellenordnung im Nullpunkt, g eine ganze Funktion und P ein mit den von 0 verschiedenen Nullstellen von f gebildetes Polynom oder unendliches Produkt.*

Folgerung 2 *Jede in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f besitzt eine Darstellung der Form $f(z) = z^m e^{g(z)} \dfrac{P(z)}{Q(z)}$; dabei ist m ganzzahlig, g eine ganze Funktion, und P und Q sind mittels der von 0 verschiedenen Null- und Polstellen von f gebildete Polynome oder unendliche Produkte.*

Kanonische Produktdarstellung *Konvergiert die Reihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty} |a_n|^{-p-1}$ so konvergiert das* kanonische Produkt $\prod\limits_{n=1}^{\infty} E\Big(\dfrac{z}{a_n}, p\Big)$ *in $\mathbb{C}$ absolut und lokal gleichmäßig.*

Produktdarstellung des Sinus

$$\sin \pi z = \pi z \prod_{n \neq 0} \Big(1 - \frac{z}{n}\Big) e^{z/n} = \pi z \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 + \frac{z}{n}\Big) e^{-z/n} \prod_{n=1}^{\infty} \Big(1 - \frac{z}{n}\Big) e^{z/n}.$$

Hat eine Funktion f eine Polstelle in $z = b$, $f(z) = \sum\limits_{k=-m}^{\infty} c_k (z-b)^k$, so heißt $H(z) = \sum\limits_{k=1}^{m} c_{-k}(z-b)^{-k}$ Hauptteil von f im Punkt $z = b$. Ist f meromorph in $\mathbb{C}$ und hat f nur endlich viele Polstellen $b_1, b_2, \ldots, b_n$ mit Hauptteilen $H_1, H_2, \ldots, H_n$ so ist $f(z) = \sum\limits_{\nu=1}^{n} H_\nu(z) + g(z)$ und g eine ganze Funktion.

Satz von Mittag-Leffler *Zu gegebener Folge (b_n) in $\mathbb{C}$ mit $b_n \to \infty$ für $n \to \infty$, und gegebener Folge (H_n) von Hauptteilen, gibt es eine in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion mit genau den Polstellen b_n und Hauptteilen H_n. Man erhält sie in Form einer in $\mathbb{C} \setminus \{b_n : n \in \mathbb{N}\}$ absolut und lokal gleichmäßig konvergenten* Partialbruchreihe $f(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \big(H_n(z) - Q_n(z)\big)$ *mit* konvergenzerzeugenden *Polynomen Q_n.*

Folgerung *Jede in $\mathbb{C}$ meromorphe Funktion f läßt sich in der Form $f(z) = \sum\limits_{n} \big(H_n(z) - Q_n(z)\big) + g(z)$ darstellen. Dabei ist die Partialbruchreihe (oder -summe) wie im Satz von Mittag-Leffler mittels der Hauptteile in den Polstellen von f zu bilden, und g ist eine ganze Funktion.*

Spezielle Partialbruchreihen

$$\pi \cot \pi z = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} \Big(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\Big), \quad \frac{\pi^2}{\sin^2 \pi z} = \sum_{n \in \mathbb{Z}} \frac{1}{(z-n)^2}, \quad \frac{\pi}{\sin \pi z} = \frac{1}{z} + \sum_{n \neq 0} (-1)^n \Big(\frac{1}{z-n} + \frac{1}{n}\Big)$$

Aufgaben zu §18

1. *Für $a \in \mathbb{C}$, $e^a \neq 1$, bestimme man die ganze Funktion g in $e^z - e^a = e^{g(z)} \prod\limits_{n=-\infty}^{\infty} \Big(1 - \dfrac{z}{a_n}\Big) e^{z/a_n}$, wobei $a_n = a + 2n\pi i$, $n \in \mathbb{Z}$.*

2. *Man zeige $\sin(z + b) = \sin b e^{z \cot b} \prod\limits_{n=-\infty}^{\infty} \Big(1 + \dfrac{z}{b_n}\Big) e^{-z/b_n}$ mit $b_n = b + n\pi$ bei festem $b \neq k\pi$.*

3. *Wie lautet der Weierstraßsche Produktsatz bzw. der Satz von Mittag-Leffler im Fall $D = \widehat{\mathbb{C}}$?*

$\boxed{\S\,19 \text{ Eulersche } \Gamma\text{-Funktion und Riemannsche } \zeta\text{-Funktion}}$

Untersucht werden zunächst Parameterintegrale der Form (*) $F(z) = \int_I f(t,z)dt$; I ist ein Intervall, D ein Gebiet, f ist stetig in $I \times D$ und bei festem $t \in I$ holomorph bezüglich $z \in D$. Im Falle eines kompakten Intervalls ist F holomorph in D und es gilt (**) $F'(z) = \int_I f_z(t,z)dt$.

> **Satz über Parameterintegrale** *Unter der Zusatzvoraussetzung: zu jeder kompakten Teilmenge $K \subset D$ gibt es eine über I integrierbare Funktion $\phi = \phi_K$ mit $|f(t,z)| \le \phi(t)$ für alle $z \in K$, ist die Funktion F in (*) holomorph in D, und es gilt (**). Dabei erfüllt f_z dieselben Voraussetzungen wie f selbst.*

Die Eulersche Gammafunktion

$$\Gamma(z) = \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}dt.$$

ist holomorph in Re $z > 0$. *Sie erfüllt dort $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$, und läßt sich* meromorph in die ganze Ebene fortsetzen, *mit Polstellen bei $z = 0, -1, -2, \ldots$ und der Partialbruchdarstellung*

$$\Gamma(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n!}\frac{1}{z+n} + \int_1^\infty e^{-t}t^{z-1}dt$$

in $\mathbb{C}$. Weiter gilt

$$\Gamma(z) = \lim_{n\to\infty} \frac{n!n^z}{z(z+1)\cdots(z+n)} = \frac{e^{-\gamma z}}{z\prod\limits_{n=1}^{\infty}\Big(1+\dfrac{z}{n}\Big)e^{-z/n}}$$

mit der Eulerschen Konstanten $\gamma = \lim\limits_{n\to\infty}(1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{n} - \log n)$, *und schließlich*

$$\sin \pi z = \frac{\pi}{\Gamma(z)\Gamma(1-z)}.$$

Eine unendliche Funktionenreihe der Form (*) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n n^{-s}$ nennt man Dirichletreihe.

> **Satz** *Eine Dirichletreihe (*) konvergiert lokal gleichmäßig entweder in der ganzen Ebene oder in einer Halbebene* Re $s > \sigma_0$, *und divergiert in* Re $s < \sigma_0$. *In einer Halbebene* Re $s > \overline{\sigma}$ *herrscht absolute Konvergenz; es gilt $\sigma_0 \le \overline{\sigma} \le \sigma_0 + 1$.*

Für $\sum\limits_{k=1}^{\infty}(-1)^{k-1}k^{-s}$ ist $\overline{\sigma} = 1$, $\sigma_0 = 0$, für $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ ist $\overline{\sigma} = \sigma_0 = 1$.

> **Die Riemannsche Zetafunktion** $\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^{-s}$ *hat die* Produktdarstellung
>
> $\zeta(s) = \prod\limits_{n=1}^{\infty} \dfrac{1}{1-p_n^{-s}}$ *in der Halbebene* Re $s > 1$; (p_n) *ist die Folge der* Primzahlen.

An dieser Stelle trifft die Funktionentheorie mit der Zahlentheorie zusammen, die Produktdarstellung ist eine der Grundlagen der analytischen Zahlentheorie.

Satz *Die Riemannsche Zetafunktion ist meromorph in $\mathbb{C}$ mit einer einfachen Polstelle in $s = 1$ und unendlich vielen einfachen Nullstellen in den Punkten $s = -2, -4, \ldots$. Sie erfüllt die* Riemannsche Funktionalgleichung $\zeta(s) = 2^s \pi^{s-1} \sin \frac{\pi s}{2} \Gamma(1-s)\zeta(1-s)$.

Die Nullstellen $s = -2, -4, \ldots$ nennt man die trivialen Nullstellen der Zetafunktion, daneben gibt es noch unendlich viele weitere, die nichttrivialen Nullstellen; sie liegen alle im kritischen Streifen $0 < \operatorname{Re} s < \frac{1}{2}$. Die wohl berühmteste Vermutung innerhalb der Mathematik ist die

Riemannsche Vermutung: *Alle nichttrivialen Nullstellen liegen auf der* kritischen Geraden $\operatorname{Re} s = \frac{1}{2}$.

Ein Beweis dieser Vermutung hätte weitreichende Folgerungen in der Zahlentheorie, sie betreffen die Primzahlfunktion $\pi(x)$, welche die Primzahlen $\le x$ zählt. Man weiß $\pi(x) \sim \dfrac{x}{\log x}$ für $x \to \infty$, genauer gilt mit $l(x) = \displaystyle\int_2^x \frac{dy}{\log y} \sim \frac{x}{\log x}$ die Fehlerabschätzung $|\pi(x) - l(x)| \le x e^{-c\sqrt{\log x}}$ mit einer Konstanten $c > 0$. Man vermutet, daß ein weitaus kleinerer Fehler vorliegt:

$$|\pi(x) - l(x)| \le C\sqrt{x} \log x.$$

Dies ist im wesentlichen mit der Riemannschen Vermutung äquivalent.

Aufgaben zu §19

1. *Man zeige* $\dfrac{\Gamma(2z)}{\Gamma(z)\Gamma(z+\frac{1}{2})} = e^{g(z)}$ *mit einer ganzen Funktion* g.

2. *(fortgesetzt) Man zeige* $g'(z) = 0$ *und leite so* $\sqrt{\pi}\,\Gamma(2z) = \Gamma(z)\Gamma\big(z + \frac{1}{2}\big)$ *her.*
(Hinweis: $\Gamma(1/2) = 2\int_0^\infty e^{-s^2} ds = \sqrt{\pi}$.*)*

3. *Man zeige: Konvergieren* $f(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k k^{-s}$ *und* $g(s) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} b_k k^{-s}$ *absolut für* $\operatorname{Re} s > c$, *so gilt* $f(s)g(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} c_n n^{-s}$ *mit* $c_n = \sum\limits_{k|n} a_k b_{n/k}$.

4. *(fortgesetzt) Man zeige: Ist* $a_1 \ne 0$, *so ist* $1/f$ *in eine Dirichletreihe* $\sum\limits_{k=1}^{\infty} c_k k^{-s}$ *entwickelbar (in einer Halbebene* $\operatorname{Re} s > \tilde{c}$*).*

5. *Man zeige* $1/\zeta(s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \mu(n) n^{-s}$; *dabei ist* $\mu(n) = (-1)^m$, *wenn* n *das Produkt von* m verschiedenen *Primzahlen ist, und* $\mu(n) = 0$ *sonst.*

6. *(fortgesetzt) Man zeige* $\zeta(s)/\zeta(2s) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} |\mu(n)| n^{-s}$.

Aus der bisher entwickelten lokalen Theorie ergeben sich nach einer Idee von Dixon der Cauchysche Integralsatz und die Cauchysche Integralformel in allgemeiner Fassung fast unmittelbar. Wichtige Folgerungen sind der Residuensatz, der Satz von Laurent und das Argumentprinzip. Auf die Auswertung von uneigentlichen Integralen und unendlichen Reihen wird danach eingegangen, und anschließend auf einfach zusammenhängende Gebiete.

§ 20 Die allgemeine Cauchysche Integralformel

Sind $\gamma_1, \ldots, \gamma_m$ geschlossene Integrationswege, so nennt man die formale Summe $\gamma = \gamma_1 + \cdots + \gamma_m$ einen Zykel und $|\gamma| = |\gamma_1| \cup \ldots \cup |\gamma_m|$ seinen Träger. Für eine stetige Funktion $f : |\gamma| \to \mathbb{C}$ wird das Kurvenintegral über γ durch $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \sum_{\nu=1}^{m} \int_{\gamma_\nu} f(z)dz$, und das Integral nach der Bogenlänge durch $\displaystyle\int_\gamma f(z)|dz| = \sum_{\nu=1}^{m} \int_{\gamma_\nu} f(z)|dz|$ definiert. Insbesondere heißt $\displaystyle\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{dz}{z-a} = \sum_{\nu=1}^{m} n(\gamma_\nu, a) = n(\gamma, a)$ wieder die Umlaufzahl von γ bezüglich $a \notin |\gamma|$.
Ein Zykel γ im Gebiet D heißt nullhomolog, kurz $\gamma \sim 0 \mod D$, wenn $n(\gamma, a) = 0$ für alle $a \notin D$. γ und $\widetilde{\gamma}$ heißen homolog, $\gamma \sim \widetilde{\gamma} \mod D$, wenn $n(\gamma, a) = n(\widetilde{\gamma}, a)$ für alle $a \notin D$. Ist γ ein geschlossener Integrationsweg, so schreibt man $k\gamma$ anstelle $\gamma + \gamma + \cdots + \gamma$ (k-mal) und $-k\gamma$ steht für $k(-\gamma)$.

Cauchysche Integralformel *Ist f holomorph im Gebiet D und γ ein nullhomologer Zykel in D, so gilt für $z \in D \setminus |\gamma|$*

$$n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta.$$

Cauchyscher Integralsatz *Ist f holomorph im Gebiet D und $\gamma \sim 0 \mod D$, so gilt* $\displaystyle\int_\gamma f(z)dz = 0.$

Eine Reihe der Form (*) $\displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n(z-z_0)^n$ heißt Laurentreihe. Sie konvergiert in einem Kreisring $\rho < |z - z_0| < r$. Liegt Konvergenz in $\rho < |z - z_0| < r$ vor, so ist die dort durch (*) definierte Funktion f holomorph und es gilt (**) $\displaystyle a_n = \frac{1}{2\pi i}\int_{|\zeta - z_0| = t} \frac{f(\zeta)}{(\zeta - z_0)^{n+1}}d\zeta$; $\rho < t < r$ ist beliebig.

Satz von Laurent *Jede im Kreisring $\rho < |z - z_0| < r$ holomorphe Funktion besitzt dort eine eindeutig bestimmte Laurententwicklung (*). Die Koeffizienten sind durch (**) gegeben.*

Aufgaben zu §20

1. *Es sei $\gamma : z = \gamma(t)$, $0 \le t \le 2\pi$, ein geschlossener Integrationsweg im Kreisring $\mathcal{A}_r$. Man zeige $\gamma \sim kC \mod \mathcal{A}_r$, wobei C die Kreislinie $z = \gamma(0)e^{it}$, $0 \le t \le 2\pi$, und k eine passende ganze Zahl ist.*

2. *Man bestimme die Laurententwicklung von $f(z) = \dfrac{z^5}{(z-1)(z-2)}$ in $|z| < 1$ und den Kreisringen $1 < |z| < 2$, $2 < |z| < \infty$ und $0 < |z - 2| < 1$.*

$\S\,21$ Residuensatz und Argumentprinzip

Ist $z = z_0$ eine isolierte Singularität von f, so heißt $\operatorname*{Res}_{z_0} f = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{|z-z_0|=r} f(z)dz$ das Residuum von f im Punkt z_0; die Definition ist von r, $0 < r < \delta$, unabhängig. Für einen einfachen Pol gilt $\operatorname*{Res}_{z_0} f = \lim\limits_{z \to z_0} (z - z_0) f(z)$, und für einen m-fachen Pol $\operatorname*{Res}_{z_0} f = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big((z - z_0)^m f(z)\big)$.

Residuensatz *Ist D ein Gebiet, $M \subset D$ eine diskrete Teilmenge von D und $\gamma \sim 0 \mod D$ mit $M \cap |\gamma| = \emptyset$, so gilt $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma f(z)dz = \sum_{a \in M} n(\gamma, a) \operatorname*{Res}_a f$ für jede in $D \setminus M$ holomorphe Funktion; die Residuensumme hat nur endlich viele von Null verschiedene Summanden.*

Folgerung *Ist f meromorph im Gebiet D mit Nullstellen $a_1, a_2, \ldots$ und Polstellen $b_1, b_2, \ldots$, jede Stelle entsprechend ihrer Vielfachheit aufgeschrieben, ist g holomorph in D und γ ein nullhomologer Zykel in D, der die Null- und Polstellen von f nicht trifft, so gilt*

$$\frac{1}{2\pi i} \int_\gamma g(z) \frac{f'(z)}{f(z)} dz = \sum_j g(a_j) n(\gamma, a_j) - \sum_k g(b_k) n(\gamma, b_k).$$

Beide Summen haben nur endlich viele von Null verschiedene Summanden.

Das Gebiet D heißt vom Zykel γ berandet, wenn $n(\gamma, a) = 1$ für $a \in D$ und $n(\gamma, a) = 0$ sonst gilt. Es ist dann $\partial D = |\gamma|$; für jedes Gebiet $G \supset \overline{D}$ ist $\gamma \sim 0 \mod G$.

Argumentprinzip *Wird das Gebiet D von γ berandet, ist f meromorph in $\overline{D}$ und $\neq 0, \infty$ auf $|\gamma| = \partial D$, so ist $\dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_\gamma \frac{f'(z)}{f(z)} dz = N - P$; N und P sind die Anzahl der Null- und Polstellen von f in D.*

Satz von Rouché *Wird das Gebiet D von γ berandet, ist f meromorph und g holomorph in $\overline{D}$, $f(z) \neq 0, \infty$ und $|g(z)| < |f(z)|$ auf ∂D, so haben f und $f + g$ in D gleichviele Nullstellen.*

Aufgaben zu $\S 21$

1. *Man zeige $\operatorname*{Res}_{z_0} f = a_{-1} = \dfrac{1}{(m-1)!} \lim\limits_{z \to z_0} \dfrac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \big((z - z_0)^m f(z)\big)$, wenn f in $z = z_0$ eine höchstens m-fache Polstelle hat.*
2. *Man bestimme die Residuen in den Polstellen von $z(\sin z)^{-2}$.*
3. *Man zeige, daß $f(z) = 1 + iz + 4z^2 - z^6$ im Kreisring $\{z : 1 < |z| < 2\}$ genau $4 = 6 - 2$ Nullstellen hat.*
4. *Man zeige, daß die ganze Funktion $e^{-z} + z - \lambda$, $\lambda > 1$, in $\operatorname{Re} z > 0$ genau eine (reelle) Nullstelle hat. (Hiweis: Man betrachte $f(z) = z - \lambda$ und $g(z) = e^{-z}$ im rechten Halbkreis $D_R = \{z : \operatorname{Re} z > 0, |z| < R\}$, $R > \lambda + 1$ beliebig.)*
5. *Man zeige, daß eine in $\overline{\mathbb{D}}$ holomorphe Funktion mit $|f(z)| < 1$ in $\overline{\mathbb{D}}$ einen Fixpunkt in $\mathbb{D}$ besitzt.*
6. *(fortgesetzt) Was passiert, wenn $|f(z)| < 1$ nur in $\mathbb{D}$ gilt? (Hinweis: Man betrachte $f_k(z) = f(r_k z)$ für eine Folge $r_k < 1$, $r_k \to 1$.)*

§ 22 Auswertung von Integralen und Reihen

(Integral A)

$$\int_{-\infty}^{\infty} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} z>0} \operatorname*{Res}_{z} R.$$

Dabei ist R eine rationale Funktion ohne reelle Polstellen mit $zR(z) \to 0$ für $z \to \infty$.

(Integral B)

$$\int_0^{\infty} x^{\alpha} R(x)dx = \frac{-\pi e^{-i\pi\alpha}}{\sin \pi\alpha} \sum_{a\in D} \operatorname*{Res}_{a} \left(z^{\alpha} R(z)\right).$$

R ist rational, $R(z) \neq \infty$ in $(0,\infty)$, ein einfacher Pol in $z=0$ ist erlaubt. Weiter gelte $zR(z) \to 0$ für $z \to \infty$. Es ist $D = \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$, in D ist $z^{\alpha} = e^{\alpha \log z}$, $\alpha \in (0,1)$, holomorph.

(Integral C)

$$\int_0^{\infty} R(x)dx = -\sum_{a\in D} \operatorname*{Res}_{a} \left(R(z)\log z\right).$$

Vorausgesetzt ist $R(z) \neq \infty$ in $[0,\infty)$ sowie $zR(z) \to 0$ für $z \to \infty$; $\log z$ ist holomorph in $D = \mathbb{C} \setminus [0,\infty)$.

(Integral D)

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{ix} R(x)dx = 2\pi i \sum_{\operatorname{Im} a>0} \operatorname*{Res}_{a} \left(R(z)e^{iz}\right) + i\pi \operatorname*{Res}_{0} R.$$

R ist rational, ohne reelle Polstellen, nur ein einfacher Pol bei $z=0$ ist erlaubt. Es wird $R(z) \to 0$ für $z \to \infty$ vorausgesetzt. Das Integral wird als Hauptwert $\lim\limits_{\substack{\rho\to 0\\ r\to\infty}} \left(\int_{\rho}^{r} + \int_{-r}^{-\rho}\right)$ verstanden. Ist R ungerade und reell, so hat man es bis auf einen Faktor mit dem (bedingt konvergenten) Integral $\int_0^{\infty} R(x)\sin x dx$ zu tun.

(Reihe E)

$$\sum_{k=1}^{\infty} R(k) = -\frac{1}{2} \sum_{a\in P} \operatorname*{Res}_{a} \left(R(z)\pi \cot \pi z\right).$$

Dabei ist vorausgesetzt: R ist rational, gerade, ohne Pole in $\mathbb{N}$ und $R(z) \to 0$ für $z \to \infty$; $P = \{p : p \text{ Pol von } R\} \cup \{0\}$.

(Reihe F)

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^{k-1} R(k) = \frac{1}{2} \sum_{a\in P} \operatorname*{Res}_{a} \left(R(z)\frac{\pi}{\sin \pi z}\right).$$

Dieselben Voraussetzungen an R.

Aufgaben zu §22

1. *Man berechne das Integral* $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{1+x^6} dx$.

2. *Ebenso* $\int_0^\infty \frac{\sqrt{x}}{1+x^3}dx$.

3. *Man zeige* $|\cot \pi z| \leq Me^{-\pi|\mathrm{Im}\, z|}$ *für* $|\mathrm{Im}\, z| = n + \frac{1}{2}$ *oder* $|\mathrm{Re}\, z| = n + \frac{1}{2}$, *mit einer von* n *unabhängigen Konstanten* $C > 0$.

4. *Man berechne* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-2}$, *ohne das letzte Beispiel dieses Paragraphen zu verwenden.*

5. *Ebenso* $\sum_{n=1}^{\infty} n^{-4}$ *und* $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n(n^4+1)^{-1}$.

§ 23 Einfach zusammenhängende Gebiete

Zur Wiederholung: Ein Gebiet D heißt einfach zusammenhängend, wenn $\widehat{\mathbb{C}} \setminus D$ zusammenhängend ist. Im einfach zusammenhängenden Gebieten D gelten der

Cauchysche Integralsatz $\int_\gamma f(z)dz = 0$

und die

Cauchysche Integralformel $n(\gamma, z)f(z) = \frac{1}{2\pi}\int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta,\ z \notin |\gamma|,$

uneingeschränkt für jede in D holomorphe Funktion f und jeden Zykel γ in D.

Satz *Ist* D *einfach zusammenhängend,* f *holomorph und nullstellenfrei in* D, *so gibt es eine in* D *holomorphe Funktion* g *mit* $f(z) = e^{g(z)}$, *und ebenso zu* $m \in \mathbb{N}$, $m \geq 2$, *eine in* D *holomorphe Funktion* h *mit* $f(z) = (h(z))^m$.

Bemerkung: Man nennt g bzw. h einen holomorphen Zweig des Logarithmus bzw. der m-ten Wurzel von f. Beide Funktionen g und h sind eindeutig festgelegt durch ihren Wert in einem Punkt. Ebenso läßt sich in eindeutiger Weise eine holomorphe Funktion f^α durch $e^{\alpha g}$ erklären. Bei dieser Schreibweise, ebenso wie bei $\log f$ oder $\sqrt{f}$, ist äußerste Vorsicht geboten, sie ist keinesfalls als Komposition zu verstehen.

Satz *In einem einfach zusammenhängenden Gebiet* D *besitzt jede holomorphe Funktion eine Stammfunktion und jede harmonische Funktion* u *eine konjugiert harmonische.*

Riemannscher Abbildungssatz *Jedes einfach zusammenhängende Gebiet* D *mit mindestens zwei Randpunkten ist konform äquivalent zu* $\mathbb{D}$, *d.h. es gibt eine konforme Abbildung (*Riemann-Abbildung*)* $f : D \to \mathbb{D}$. *Sie ist eindeutig festgelegt durch die Forderungen* $f(z_0) = 0$ *und* $f'(z_0) > 0$, $z_0 \in D$ *beliebig.*

Aufgaben zu §23

1. *Man bestimme in* $\mathbb{C}$ *eine konjugiert harmonische Funktion* v *zu* $u(x+iy) = e^x(x\cos y - y\sin y)$.

2. *Dasselbe für* $u(x+iy) = \frac{x^2-y^2}{(x^2+y^2)^2}$ *in der oberen Halbebene.*

3. *Man zeige: Ist* u *harmonisch im Gebiet* D *(nicht unbedingt einfach zusammenhängend) und* $\int_\gamma \frac{\partial u}{\partial n}|dz| = 0$ *für jeden glatten Zykel in* D, *so besitzt* u *in* D *eine konjugiert harmonische Funktion; dabei bedeutet* $\frac{\partial u}{\partial n}$ *die Ableitung nach der äußeren Normalen von* γ.
   (Hinweis: Man betrachte die in D *holomorphe Funktion* $u_x - iu_y$.

4. *Es sei* $f : \partial\mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{C}$ *eine stetige Funktion. Man zeige, daß sich* f *genau dann zu einer in* $\mathbb{D}$ *holomorphen (und in* $\overline{\mathbb{D}}$ *stetigen) Funktion fortsetzen läßt, wenn für alle* $n \in \mathbb{N}$ *gilt:* $\int_0^{2\pi} f(e^{i\theta})e^{in\theta}d\theta = 0$.
   (Hinweis: Man berechne die Fourierkoeffizienten von $f(e^{i\theta})$.*)*