ÜBUNGSBLATT 8

AUFGABE: Übung 1 und Übung 2

Übung 1. Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$ mit ℓ_2-normierten Spalten. Zeige dass, die Rekonstruktion von s-dünnen Vektoren mittels Basisjagd stabil ist falls $(2s-1)\mu < 1$, wobei μ die Kohärenz von A ist, d.h. existiert eine Konstant C so dass $\|x^\# - x\|_1 \le C\sigma_s(x)_1$, wobei $x^\#$ der Minimierer von (P_1) ist.

Wovon C abhängig ist?

Übung 2. Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$. Finde eine Bedingung (ähnlich zu $(2s-1)\mu < 1$) so dass das ℓ_q-Minimisierungsproblem, $0 < q \le 1$, mit NB $Ax = y$ die Rekonstruktion von s-dünnen Vektoren $x \in \mathbb{C}^N$ erlaubt.

(Errinerung: Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$ und $0 < q \le 1$. Jeder s-dünner Vektor $x \in \mathbb{C}^N$ ist die eindeutige Lösung von $\min_{x\in\mathbb{C}^N} \|x\|_q$ mit NB $Ax = y \Leftrightarrow \forall\, S \subset N$ mit $|S| = s$, $\|v_S\|_q < \|v_{S^c}\|_q \;\forall\, v \in \ker(A) \setminus \{0\}$.)

Übung 3. Finde eine Matriz $A \in \mathbb{R}^{2\times 3}$ mit kleinsten δ_2.

Übung 4. Zeige dass, die folgende Definitionen äquivalent sind.

(a) Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$. $\theta_{s,t}(A)$ ist die kleinste Konstante θ so dass $|\langle Au, Av\rangle| \le \theta\|u\|_2\|v\|_2$ für alle $u \in \mathbb{C}^N$ s-dünn und alle $v \in \mathbb{C}^N$ t-dünn mit $supp(u) \cap supp(v) = \emptyset$ gilt.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$. $\theta_{s,t}(A) = \{\|A_T^* A_S\|_{2\to 2}, S \cap T = \emptyset, |S| \le s, |T| \le t\}$.

Übung 5. Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$. Bei der Ausdruck $\Re(\langle x, y\rangle) = \frac{1}{4}(\|x+y\|_2 - \|x-y\|_2)$ zeige dass,

$$|\langle Au, Av\rangle| \le \delta_{s,t}\|u\|_2\|v\|_2$$

für alle $u \in \mathbb{C}^N$ s-dünn und alle $v \in \mathbb{C}^N$ t-dünn mit $supp(u) \cap supp(v) = \emptyset$ gilt.