ÜBUNGSBLATT 7

AUFGABE: Übung 1

Übung 1. Sei $\mathcal{A} : \mathbb{C}^{n_1 \times n_2} \to \mathbb{C}^m$ linear und sei $n = \min(n_1, n_2)$.

(a) Nehme an dass, für alle $M \in \ker \mathcal{A} \setminus \{0\}$ die singulare Werten von M

$$\sum_{j=1}^{r} \sigma_j(M) \leq \rho \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j(M) \tag{1}$$

mit $0 < \rho < 1$ erfüllen.

Zeige dass,

$$\|X - Z\|_* \leq \frac{1+\rho}{1-\rho} \left(\|Z\|_* - \|X\|_* + 2 \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j(X) \right) \tag{2}$$

für alle $X, Z \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ mit $\mathcal{A}(X) = \mathcal{A}(Z)$.

(b) Zeige dass, (2) $\implies$ (1).

(c) Sei $X \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ und sei $X^{\#}$ die Lösung von

$$\min_{Z \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}} \|Z\|_* \qquad \text{mit NB} \qquad \mathcal{A}(Z) = \mathcal{A}(X).$$

Zeige dass,

$$\|X - X^{\#}\|_* \leq \frac{2(1+\rho)}{1-\rho} \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j(X).$$

Übung 2. Sei $\mathcal{A} : \mathbb{C}^{n_1 \times n_2} \to \mathbb{C}^m$ linear, sei $n = \min(n_1, n_2)$ und sei $\|\cdot\|$ eine Norm in $\mathbb{C}^m$.

(a) Nehme an dass, für alle $M \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ die singulare Werten von M

$$\sum_{j=1}^{r} \sigma_j(M) \leq \rho \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j(M) + \tau \|\mathcal{A}(M)\| \tag{3}$$

mit $0 < \rho < 1$ und $\tau > 0$ erfüllen.

Zeige dass,

$$\|X - Z\|_* \leq \frac{1+\rho}{1-\rho} \left(\|Z\|_* - \|X\|_* + 2 \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j(X) \right) + \frac{2\tau}{1-\rho} \|\mathcal{A}(Z - X)\|. \tag{4}$$

für alle $X, Z \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$.

(b) Zeige dass, (4) $\implies$ (3).

(c) Nehme an dass, für alle $M \in \ker \mathcal{A} \setminus \{0\}$ die singulare Werten von M

$$\left(\sum_{j=1}^{r} \sigma_j(M)^2 \right)^{1/2} \leq \frac{\rho}{\sqrt{r}} \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j(M) + \tau \|\mathcal{A}(M)\|$$

mit $0 < \rho < 1$ und $\tau > 0$ erfüllen.

Sei $X \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}$ so dass $\|\mathcal{A}(X) - y\|_2 \leq \eta$. Sei $X^\#$ die Lösung von

$$\min_{Z \in \mathbb{C}^{n_1 \times n_2}} \|Z\|_* \qquad \text{mit NB} \qquad \|\mathcal{A}(Z) - y\|_2 \leq \eta$$

Zeige dass,

$$\|X - X^\#\|_F \leq \frac{C}{\sqrt{r}} \sum_{j=r+1}^{n} \sigma_j(X) + D\eta$$

mit Konstanten $C, D > 0$ abgehängt nur von ρ und τ.

Übung 3. Sei X eine Zufallsvariable.

(a) Zeige dass, $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|)}{t}$ für $t > 0$.

(b) Leite her dass, $\mathbb{P}(|X| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}(|X|^p)}{t^p}$ für $t > 0$ und $p > 0$, und dass $\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}(X)| \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}|X - \mathbb{E}(X)|^2}{t^2}$ für $t > 0$.

(c) Zeige dass, $\mathbb{P}(X - \mathbb{E}(X) \geq t) \leq \frac{Var(X)}{Var(X) + t^2}$ für $t > 0$.

Übung 4. (a) Beweise dass,

$$\int_u^\infty e^{-t^2/2}\, dt \leq \min(\sqrt{\pi/2}, u^{-1}) e^{-u^2/2}, \quad \text{und} \quad \int_u^\infty e^{-t^2/2}\, dt \geq \max(u^{-1} - u^{-3}, \sqrt{\pi/2} - u) e^{-u^2/2},$$

für $u > 0$.

(b) Leite her die folgende

$$\mathbb{P}(|g| \geq u) \leq e^{-u^2/2}, \qquad \mathbb{P}(|g| \geq u) \leq \sqrt{\pi/2}\, u^{-1} e^{-u^2/2}$$
$$\mathbb{P}(|g| \geq u) \geq \sqrt{\pi/2}\, u^{-1}(1 - u^{-2}) e^{-u^2/2}, \qquad \mathbb{P}(|g| \geq u) \geq (1 - u\sqrt{\pi/2}) e^{-u^2/2},$$

mit $u > 0$ und wobei g eine standardnormalverteilte Zufallsvariable ist.

Übung 5. Sei g eine standardnormalverteilte Zufallsvariable und sei $\theta \in \mathbb{R}$. Zeige dass,

(a) $\mathbb{E} \exp(\theta g) = \exp(\theta^2/2)$,

(b) $\mathbb{E} \exp(a g^2 + \theta g) = \frac{1}{\sqrt{1-2a}} \exp\left(\frac{\theta^2}{2(1-2a)}\right)$, mit $a < 1/2$.

Übung 6. Sei g eine standardnormalverteilte Zufallsvariable. Beweise dass, die gerade Momenten von g durch $\mathbb{E} g^{2n} = \frac{(2n)!}{2^n n!}$, $n \in \mathbb{N}$, gegeben sind.

Übung 7. Seien $X_1, \ldots, X_M$ unabhängige Zufallsvariablen (mit reellen Werten) und mit Kummulantenerzeugenden Funktionen (cumulant-generating functions) C_{X_l}, $l \in \{1, \ldots, M\}$. Zeige dass,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{l=1}^{M} X_l \geq t\right) \leq \exp\left(\inf_{\theta > 0} \left\{-\theta t + \sum_{l=1}^{M} C_{X_l}(\theta)\right\}\right).$$