

ÜBUNGSBLATT 6

AUFGABE: alle Übungen

ABGABETERMIN: 7. December

Übung 1. Beweise den folgenden Satz.

Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$ und $M \in \mathbb{C}^{m \times m}$ so dass MA die ℓ_2 -robuste NRE der Ordnung s mit Konstanten $0 < \rho < 1$ und $\tau > 0$ erfüllt. Dann, existieren Konstanten $C, D > 0$ abgehängt nur von ρ, τ und $\|M\|_{2 \rightarrow 2}$ so dass für jeden $x \in \mathbb{C}^N$

$$\|x - x^\# \|_p \leq \frac{C}{s^{1-1/p}} \sigma_s(x)_1 + Ds^{1/p-1/2} \eta, \quad 1 \leq p \leq 2,$$

wobei $x^\# \in \mathbb{C}^N$ eine Lösung von $(P_{1,\eta})$ mit $\|Ax - y\|_2 \leq \eta$ ist.

Übung 2. Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$ so dass

$$\|v_S\|_2 \leq \frac{\rho}{\sqrt{s}} \|v_{S^c}\|_1 + \tau \|A^* A v\|_\infty$$

für alle $S \subset \bar{N}$ und alle $v \in \mathbb{C}^N$ mit $0 < \rho < 1$ und $\tau \geq 0$. Sei $x \in \mathbb{C}^N$ und $y \in \mathbb{C}^m$ so dass $\|A^*(Ax - y)\|_\infty \leq \eta$, und sei $x^\#$ ein Minimierer von

$$\min_{z \in \mathbb{C}^N} \|z\|_1 \quad \text{mit NB} \quad \|A^*(Az - y)\|_\infty \leq \eta.$$

Zeige dass,

$$\|x - x^\# \|_2 \leq \frac{C \sigma_s(x)_1}{\sqrt{s}} + D\eta,$$

mit $C, D > 0$ abgehängt nur von ρ und τ .

Übung 3. Sei $A \in \mathbb{C}^{m \times N}$ und $x \in \mathbb{C}^N$ mit $\text{supp}(x) = S \subset \bar{N}$. Zeige dass, x ein Minimierer von

$$\min_{z \in \mathbb{C}^N} \|z\|_1 \quad \text{mit NB} \quad Az = Ax$$

ist, falls eine von die folgende (äquivalente) Bedingungen gilt.

- (1) $|\sum_{j \in S} v_j \overline{\text{sgn}(x_j)}| \leq \|v_{S^c}\|_1$ für alle $v \in \ker A$.
- (2) Existiert ein Vektor $h \in \mathbb{C}^m$ so dass $(A^*h)_j = \text{sgn}(x_j)$ falls $j \in S$ und $|(A^*h)_l| \leq 1$ falls $l \in S^c$.

Übung 4. Sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad x = (e^{-\frac{i\pi}{3}}, e^{\frac{i\pi}{3}}, 0).$$

Weise nach dass, x der eindeutige Minimierer von $\min_{z \in \mathbb{C}^3} \|z\|_1$ mit $Az = Ax$ ist. Erfüllt die Matrix A die Bedingung (a) von Satz 2.21?