ÜBUNGSBLATT 13

HAUSAUFGABE: Übung 4

ABGABETERMIN: 8. Februar

Seien $x \in \mathbb{R}^{2m}$ und $G = \frac{1}{\sqrt{m}}(g_{ij})$ eine Gaußsche Zufallasmatrix mit $g_{ij} \sim \mathcal{N}(0,1)$ unabhängig. Setze $A = (I \mid G) \in \mathbb{R}^{m \times 2m}$, $B = (G^* \mid -I) \in \mathbb{R}^{m \times 2m}$ und $M = \ker A$.

Übung 1. (a) Finde eine Konstante b so dass $\frac{1}{\sqrt{m}}\|x\|_1 \leq b\|x\|_2$ für alle $x \in \mathbb{R}^{2m}$.

(b) Zeige dass $M^\perp = \ker B$.

Übung 2. Sei $0 < t \leq 1$ und sei $\mathbb{R}^{2m} \ni x = (u,v)$ mit $u, v \in \mathbb{R}^m$

(a) Zeige dass,

$$\mathbb{P}\left(|\|Ax\|_2^2 - \|x\|_2^2| \geq t\|x\|_2^2\right) \leq \mathbb{P}\left(|\langle u, Gu\rangle| \geq \frac{t}{2}\|u\|_2\|v\|_2\right) + \mathbb{P}\left(|\|Gv\|_2^2 - \|v\|_2^2| \geq \frac{t}{2}\|v\|_2^2\right).$$

(b) Leite her dass,

$$\mathbb{P}\left(|\|Ax\|_2^2 - \|x\|_2^2| \geq t\|x\|_2^2\right) \leq 2\exp(-ct^2 m)$$

mit $c > 0$ Konstante.

(c) Was passiert in (a) und (b) wenn man die Matrix B anwenden?

Übung 3. (a) Wende Idee aus Satz 8, Kapitel 5 an zu zeigen dass $\mathbb{P}(\delta_s(A) < \delta) \geq 1 - \epsilon$, falls $\gamma m \leq s \leq 2\gamma m$, wobei γ nur von c, ϵ, δ abhängt.

(b) Partitioniere $\bar{N}$ in $S_1, S_2, \ldots$ so dass $|S_j| \leq s$ und $|x_i| \geq |x_j|$ für alle $i \in S_{k-1}$ und $j \in S_k$. Zeige dass,

$$\|x\|_2 \leq C(\gamma, \delta)\frac{\|x\|_1}{\sqrt{m}}$$

für $x \in M$.

Zusammenfassung (Übungen 1-3): Es gibt Konstanten $\alpha, \beta > 0$, so dass für jedes $m \in \mathbb{N}$ ein Teilraum $M \subset \mathbb{R}^{2m}$ mit $\dim M = m$ existiert mit

$$\alpha\|x\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{m}}\|x\|_1 \leq \beta\|x\|_2$$

für $x \in M$ und $x \in M^\perp$.

Übung 4. Beweise das kombinatorische Lemma vorgestellt in der Vorlesung.

Kombinatorisches Lemma: Seien $s, N \in \mathbb{N}$ mit $s < N$. Dann existieren $n \geq \left(\frac{N}{4s}\right)^{s/2}$ Teilmengen $S_1, \ldots, S_n \subset \bar{N}$ mit $|S_j| \leq s$ für alle $j \in \bar{N}$ und $|S_i \cap S_j| < s/2$ für alle $i \neq j$.

(Hilfe: Definiere $\mathcal{A} := \{S \subset \bar{N} \mid |S| = s\}$ und wähle $S_1 \in \mathcal{A}$ belibig. Definiere $\mathcal{A}_1 := \{S \subset \mathcal{A} \mid |S_1 \cap S| \geq s/2\}$ und wähle $S_2 \in \mathcal{A} \setminus (\mathcal{A}_1)$. Durch Induktion definiere die andere Teilmengen S_j und zahle wie viele sind.)