ÜBUNGSBLATT 12

HAUSAUFGABE: Übung 1, Übung 2

ABGABETERMIN: 1. Februar

Übung 1. Beweise die folgende Eigenschaten der Gelfandzahlen $c_k(T)$, $k \in \mathbb{N}$.

(a) $c_{k+l-1}(T) \leq c_k(T) + c_l(T)$,

(b) $c_k(RST) \leq \|R\| c_k(S) \|T\|$,

(c) rank $T < k \Longrightarrow c_k(T) = 0$.

Übung 2. Finde und beweise einen äquivalenten Satz zu Satz 8 aus Kapitel 6 im Fall die ℓ_q-norm, $0 < q \leq 1$, betracht ist. (Satz 8: Sei $t > 0$, $d \in \mathbb{N}_0$. Es existiert eine Menge $\mathcal{N} \subset \mathbb{S}^{d-1}$ so dass $\#\mathcal{N} \leq (1 + 2/t)^d$ und für alle $y \in \mathbb{S}^{d-1}$ existiert ein $x \in \mathcal{N}$ mit $\|y - x\|_2 \leq t$.)

Übung 3. Sei X eine Zufallsvariable.

(a) Zeige den folgenden Aussage.

$$\exists\, c > 0 \text{ so dass } \mathbb{E}(\exp(\theta X)) \leq \exp(c\theta^2) \;\forall\, \theta \in \mathbb{R} \Longrightarrow \mathbb{E}(X) = 0 \text{ und } X \text{ sub-Gaußsch ist.}$$

(b) Seien $X_1, \ldots, X_n$ unabhängige subgaußsche Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(\exp(\theta X_i)) \leq \exp(c\theta^2)$ für alle i . Zeige dass $\sum_{i=1}^n X_i$ sub-Gaußsch ist, d.h.

$$\mathbb{E}(\exp(\theta \sum_{i=1}^n X_i)) \leq \exp(nc\theta^2).$$

(c) Zeige dass, Rademacher Zufallsvariablen X, d. h. $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$ und $\mathbb{P}(X = 0) = 0$, sub-Gaußsch sind.

(d) Zeige dass, gleichverteilte Zufallsvariablen $X \in [-1, 1]$ sub-Gaußsch sind.

Übung 4. Beweise Lemma 2 aus Kapitel 8.

Lemma 2: Seien $m, N, s \in \mathbb{N}$ und C eine Konstante mit $s \leq \frac{Cm}{\log((eN)/m)}$. Dann ist $m \geq cs \log(eN/s)$ mit einer Konstante $c > 0$ abhängig nur von C.