

## ÜBUNGSBLATT 12

### HAUSAUFGABE: Übung 1, Übung 2

#### ABGABETERMIN: 1. Februar

**Übung 1.** Beweise die folgende Eigenschaften der Gelfandzahlen  $c_k(T)$ ,  $k \in \mathbb{N}$ .

- (a)  $c_{k+l-1}(T) \leq c_k(T) + c_l(T)$ ,
- (b)  $c_k(RST) \leq \|R\|c_k(S)\|T\|$ ,
- (c)  $\text{rank } T < k \implies c_k(T) = 0$ .

**Übung 2.** Finde und beweise einen äquivalenten Satz zu Satz 8 aus Kapitel 6 im Fall die  $\ell_q$ -norm,  $0 < q \leq 1$ , betrachtet ist. (Satz 8: Sei  $t > 0$ ,  $d \in \mathbb{N}_0$ . Es existiert eine Menge  $\mathcal{N} \subset \mathbb{S}^{d-1}$  so dass  $\#\mathcal{N} \leq (1 + 2/t)^d$  und für alle  $y \in \mathbb{S}^{d-1}$  existiert ein  $x \in \mathcal{N}$  mit  $\|y - x\|_2 \leq t$ .)

**Übung 3.** Sei  $X$  eine Zufallsvariable.

(a) Zeige den folgenden Aussage.

$$\exists c > 0 \text{ so dass } \mathbb{E}(\exp(\theta X)) \leq \exp(c\theta^2) \forall \theta \in \mathbb{R} \implies \mathbb{E}(X) = 0 \text{ und } X \text{ sub-Gaußsch ist.}$$

(b) Seien  $X_1, \dots, X_n$  unabhängige subgaußsche Zufallsvariablen mit  $\mathbb{E}(X_i) = 0$  und  $\mathbb{E}(\exp(\theta X_i)) \leq \exp(c\theta^2)$  für alle  $i$ . Zeige dass  $\sum_{i=1}^n X_i$  sub-Gaußsch ist, d.h.

$$\mathbb{E}(\exp(\theta \sum_{i=1}^n X_i)) \leq \exp(nc\theta^2).$$

(c) Zeige dass, Rademacher Zufallsvariablen  $X$ , d. h.  $\mathbb{P}(X = 1) = \mathbb{P}(X = -1) = 1/2$  und  $\mathbb{P}(X = 0) = 0$ , sub-Gaußsch sind.

(d) Zeige dass, gleichverteilte Zufallsvariablen  $X \in [-1, 1]$  sub-Gaußsch sind.

**Übung 4.** Beweise Lemma 2 aus Kapitel 8.

Lemma 2: Seien  $m, N, s \in \mathbb{N}$  und  $C$  eine Konstante mit  $s \leq \frac{Cm}{\log((eN)/m)}$ . Dann ist  $m \geq cs \log(eN/s)$  mit einer Konstante  $c > 0$  abhängig nur von  $C$ .