ÜBUNGSBLATT 11

HAUSAUFGABE: Übung 1 und Übung 2

ABGABETERMIN: 25. Januar

Übung 1. Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$ mit $\delta_{2s} < 1/3$. Sei $x \in \mathbb{C}^N$ und $y \in \mathbb{C}^m$ so dass $\|Ax - y\|_2 \leq \eta$. Zeige dass

$$\|x^\# - x\|_2 \leq \frac{C}{\sqrt{s}}\sigma_s(x)_1 + D\eta,$$

wobei $x^\#$ ein Minimierer von $(P_{1,\eta})$ mit $\|Az - y\|_2 \leq \eta$ ist.

Übung 2. Sei $A \in \mathbb{R}^{m\times N}$. Die *restricted isometry ratio* ist definiert durch

$$\gamma_s(A) = \frac{\beta_s}{\alpha_s},$$

wobei α_s die großte Konstante $\alpha \geq 0$ ist und β_s die kleinste Konstante $\beta \geq 0$ ist so dass

$$\alpha\|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq \beta\|x\|_2^2,$$

für alle $x \in \mathbb{C}^N$ s-dünnen Vektoren.

Zeige dass, wenn $\gamma_{2s}(A) < 2$ gilt, jeder s-dünne Vektor x die eindeutige Lösung vom ℓ_1-Minimierungsproblem mit NB $Ax = Az$ ist.

Übung 3. Beweise den folgenden Satz.

Sei $x \in \mathbb{R}^N$ mit $\|x\|_2 = 1$. Dann existiert eine absolute Konstante $c = \frac{1}{40}$ so dass

$$\mathbb{P}\left(|\|Ax\|_2^2 - 1| \geq t\right) \leq 2e^{-cmt} \qquad \forall\, t \in (0,1).$$

Übung 4. Beweise die folgende Version der Bernstein-Ungleichung.

Seien $A_1, A_2, \dots, A_n$ unabhängige Ereignisse in $(\Omega, \mathcal{A}, \mathbb{P})$ mit $\mathbb{P}(A_i) = p$ für alle $i = 1, \dots, n$ und sei $S_n(w) = \sum_{i=1}^n \chi_{A_i}(w)$. Dann,

$$\mathbb{P}\left(|S_n - pn| \geq n\epsilon\right) \leq 2e^{-2\epsilon^2 n} \qquad \forall\, \epsilon > 0 \quad \forall\, n \in \mathbb{N}.$$