ÜBUNGSBLATT 10

Übung 1. Seien $X_1, \dots, X_m : \Omega \to \mathbb{R}$ unabhängige Zufallsvariablen mit $\mathbb{E}(X_i) = 0$ für alle $i \in \bar{m}$. Nehme an dass, $|X_i| \leq k$ fast sicher und $\mathbb{E}(|X_i|^2) \leq \sigma_i^2$ für alle $i \in \bar{m}$. Zeige dass,

$$\mathbb{P}\left(|\sum_{i=1}^{m} X_i| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{t^2}{2(\sigma^2 + (k/3)t)}\right)$$

mit $\sigma^2 = \sum_{i=1}^m \sigma_i^2$ gilt.

Übung 2. Seien $X_1, \dots, X_m$ subexponentielle Zufallsvariablen, d. h. existieren $\beta, \eta \in (0, +\infty)$ so dass $\mathbb{P}(|X_i| \geq t) \leq \beta e^{-\eta t}$ für alle $t \geq 0$. Nehme an dass, $\mathbb{E}(X_i) = 0$ für alle i. Zeige dass,

$$\mathbb{P}\left(|\sum_{i=1}^{m} X_i| \geq t\right) \leq 2\exp\left(-\frac{(\eta t)^2}{2(2\beta m + \eta t)}\right)$$

gilt.

Übung 3. (a) Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$. Konstruiere eine Matrix $\tilde{A} = \begin{pmatrix} A \\ B \end{pmatrix}$ so dass $\delta_s(\tilde{A}) > \delta_s(A)$.

(b) Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$ und nehme an dass, $\delta_s(A) < 3/5$. Zeige dass, $\delta_s(2A) \geq \delta_s(A)$.

(c) Sei $D_\epsilon = diag(\epsilon, 1/\epsilon, 1, \dots, 1) \in \mathbb{C}^{2s\times 2s}$ und sei

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & -1 \\ 0 & 1 & \dots & 0 & -1 \\ \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & -1 \end{pmatrix} \in \mathbb{C}^{2s\times(2s+1)}.$$

Zeige dass, A und $D_\epsilon A$ die NRE der Ordnung s haben. Außerdem, setze $s = 1$ und zeige dass, $\delta_1(D_\epsilon A)$ gross sein kann.

Übung 4. Sei $A \in \mathbb{C}^{m\times N}$ und seien α_s, β_s die größte und kleinste Konstanten so dass

$$\alpha\|x\|_2^2 \leq \|Ax\|_2^2 \leq \beta\|x\|_2^2$$

für alle s-dünne Vektoren $x \in \mathbb{C}^N$. Finde $\delta_s(tA)$ abhängig von α und β.