7.5.2013

# Analysis II – Globalübung

## Nachtrag

Zu zeigen: Stetigkeit der Funktion $f:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ in $(0,0)$

mit
$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{e^{xy^2}-1}{xy}, & x\cdot y \neq 0 \\ y, & x = 0 \\ 0, & y = 0 \end{cases}$$

Behauptung: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0$

$$|f(x,y) - 0| \leq \max\Big\{ \underbrace{\Big|\frac{e^{xy^2}-1}{xy}\Big|}_{\overset{!}{\to} 0}, \underbrace{|y|}_{\overset{!}{\to} 0}, 0 \Big\} \longrightarrow 0 \quad (x,y) \to (0,0)$$

für $(x,y) \to (0,0)$

- Es ist: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} |y| = 0$, denn $|y| \leq \|(x,y)\|_\infty \longrightarrow 0$ für $(x,y) \to (0,0)$ (Stetigkeit der Norm)

- Es ist $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big|\frac{e^{xy^2}-1}{xy}\Big| = 0$, denn es ist mit $(x,y) \to (0,0)$ auch $z := xy^2$ Nullfolge $\big(|xy^2| \leq \|(x,y)\|_\infty^3\big)$

und $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big|\frac{e^{xy^2}-1}{xy^2}\Big| = \lim_{z\to 0} \Big|\frac{e^z-1}{z}\Big| \overset{\text{Ana I}}{=} 1.$

Insgesamt: $\lim_{(x,y)\to(0,0)} \Big|\frac{e^{xy^2}-1}{xy^2}\cdot y\Big| = 0$, nach Rechenregeln für Grenzwerte.

$\Rightarrow$ Behauptung.