Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück

Dortmund, 17. Januar 2017

Komplexe dynamische Systeme
Beweis zu Satz 3.4.4 (Blumensatz)

Beweis. Es sei $\mathscr{L}_k$ das stabile Gebiet, das P_k (mit P_k aus Bemerkung 3.4.3) enthält. Dann gilt $f^n \to 0$ $(n \to \infty)$ lokal gleichmäßig in P_k und nach dem Satz von Vitali gilt dies auch lokal gleichmäßig in $\mathscr{L}_k$. Nach Lemma 3.1.7 gilt

$$\arg f^n(z) - \arg f^n(z_0) \to 0 \pmod{2\pi} \quad (n \to \infty)$$

lokal gleichmäßig in $\mathscr{L}_k$ für jedes $z_0 \in P_k$. Also gibt es zu jedem $z \in \mathscr{L}_k$ ein $n_0 = n_0(z) \in \mathbb{N}$ mit $f^n(z) \in P_k$ für alle $n \geq n_0$. Hieraus folgt, dass die $\mathscr{L}_k$ paarweise disjunkt sind und aufgrund der Existenz abstoßender Blütenblätter existieren genau s Leaugebiete. Da

$$\phi(z) = \lim_{n\to\infty} \left[\phi(f^n(z)) - n\right],$$

folgt weiter, dass ϕ in $\mathscr{L}_k$ analytisch fortsetzbar ist, d.h. die Lösung der Abelschen Funktionalgleichung existiert in ganz $\mathscr{L}_k$.

Wir zeigen nun: Aufgrund der Asymptotik $\phi(z) \sim \frac{1}{as} z^{-s}$ $(z \to 0)$ gibt es ein Blütenblatt $Q_k \subset P_k$, das durch ϕ konform auf eine Halbebene H_c abgebildet wird. Wir können annehmen, dass P_k beschränkt, P_k symmetrisch zu $\arg z = 0$ mit Halbtangenten $\arg z = \pm\frac{\pi}{s}$ an 0 und $as = 1$, d.h. $\phi(z) \sim z^{-s}$. Wir betrachten ein Blütenblatt $\widetilde{P}_k \subset P_k$ mit Halbtangenten $\arg z = \pm\alpha$ an 0, wobei $\frac{\pi}{2s} < \alpha < \frac{\pi}{s}$. Setzen wir $\Gamma := \partial\widetilde{P}_k$, so verläuft $\phi \circ \Gamma$ ganz in einer Halbebene $\{\, w \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} w \leq c_0 \,\}$. Ist also $c > c_0$, so ist die Umlaufzahl aller $w \in H_c$ bezüglich der Kurve $\phi \circ \Gamma$ gleich. Wir zeigen, dass diese Umlaufzahl gleich 1 ist für ein $w_0 \in H_c \cap \mathbb{R}$. Nach dem Argumentprinzip gibt es dann zu jedem $w \in H_c$ genau ein $z \in \widetilde{P}_k$ mit $\phi(z) = w$, und $Q_k := \phi^{-1}(H_c)$ leistet das Gewünschte. Wir transformieren P_k mittels $g(z) := z^{-s}$ und bezeichnen mit ψ die zugehörige Lösung der Abelschen Funktionalgleichung in $g(P_k)$. Es gilt dann $\psi(z) \sim z$ $(z \to \infty)$ und $g(\widetilde{P}_k)$ enthält eine Halbebene $H_{\tilde{c}_0}$. Wir wählen $R_0 > \tilde{c}_0$ mit $\left|\frac{\psi(z)}{z} - 1\right| \leq \frac{1}{2}$ für $z \in g(\widetilde{P}_k)$, $|z| \geq R_0$. Für $R \geq 3R_0$ und $z \in \partial g(\widetilde{P}_k)$ folgt

$$|\psi(z) - R - (z - R)| = |\psi(z) - z| \leq \tfrac{1}{2}\,|z| \leq \tfrac{1}{2}\,|z - R|\,.$$

Nach dem Satz von Rouché haben $\psi(z) - R$ und $z - R$ die gleiche Anzahl Nullstellen in $g(\widetilde{P}_k)$, nämlich genau eine, woraus die obige Behauptung folgt.

Wir wählen die oben konstruierte Halbebene H_c maximal (wobei $H_c = \mathbb{C}$, falls $c = -\infty$) und bezeichnen mit ψ die Umkehrfunktion von ϕ in H_c. Wegen $Q_k = \psi(H_c) \subset P_k \subset \mathscr{L}_k \subset \mathscr{F}(f) = \widehat{\mathbb{C}} \setminus \mathscr{J}(f)$ und $|\mathscr{J}(f)| = \infty$, kann ψ keine ganze Funktion sein, d.h. $c \in \mathbb{R}$. Für

$z \in Q_k$ gilt $\operatorname{Re} \phi(f(z)) = \operatorname{Re} \phi(z) + 1 > c + 1$, also $\overline{Q}_k \subset \mathscr{L}_k \cup \{0\}$ und $f(\overline{Q}_k) \subset Q_k \cup \{0\}$. Da H_c maximal gewählt wurde, besitzt ψ eine Singularität $\omega \in \partial H_c$ und wegen (1) erfüllt ψ die Funktionalgleichung $f(\psi(z)) = \psi(z+1)$ für $z \in H_c$. Daher ist $\psi(\omega + 1) \in \mathscr{L}_k$ eine Singularität von f^{-1} (denn sonst wäre ψ holomorph in ω), d.h. $\psi(\omega + 1) \in \operatorname{sing} f^{-1}$, also $\mathscr{L}_k \cap \operatorname{sing} f^{-1} \neq \emptyset$.

Nun gelte zusätzlich $f(\mathscr{L}_k) = \mathscr{L}_k$. Aus (1) folgt $\phi(\mathscr{L}_k) = \phi(f(\mathscr{L}_k)) = \phi(\mathscr{L}_k) + 1$. Da $\phi(\mathscr{L}_k)$ die Halbebene H_c enthält, folgt $\phi(\mathscr{L}_k) = \mathbb{C}$. Nun gibt es ein $\zeta \in \partial Q_k$ mit $\phi(\zeta) = \omega$, wobei ω die obige Singularität von ψ auf ∂H_c ist. Dann gilt $\phi'(\zeta) = 0$ und daher wegen (1) $\phi'(f(\zeta))f'(\zeta) = \phi'(\zeta) = 0$. Wegen $f(\zeta) \in Q_k$, folgt $f'(\zeta) = 0$, d.h. ζ ist ein kritischer Punkt von f. Da $\operatorname{Re} \phi(f^n(\zeta)) = \operatorname{Re} \phi(\zeta) + n \to \infty$ $(n \to \infty)$ kann ζ nicht präperiodisch sein.

Schließlich sei f rational und $\mathscr{L}_k$ m-fach zusammenhängend mit $m \in \mathbb{N}$. Es gilt $f \colon \mathscr{L} \xrightarrow{j:1} \mathscr{L}$ mit $j \in \mathbb{N}$ und f hat in $\mathscr{L}_k$ mindestens $r \geq 1$ kritische Punkte. Aus der Riemann-Hurwitz-Formel folgt $m - 2 = k(m-2) + r$ und daher $m = 1$. $\square$