Eine komplexe Zahl $z = x + iy \neq 0$ kann wie ein Punkt $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ durch Polarkoordinaten beschrieben werden. Ist $r := |z|$ und $\varphi \in (-\pi, \pi]$ der Winkel zwischen dem Strahl $[0, z]$ und der positiven reellen Achse, so gilt

$$z = r(\cos\varphi + i\sin\varphi) = re^{i\varphi}\,.$$

Diese Darstellung nennt man *Polardarstellung* von z. Sie gilt dann auch für alle Winkel der Form $\varphi_k := \varphi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Jedes solche φ_k heißt ein *Argument* von z. Die Menge aller Argumente von z bezeichnen wir mit

$$\arg z := \{\, \varphi_0 + 2k\pi : k \in \mathbb{Z} \,\}\,.$$

Es ist also $\arg z$ eine Äquivalenzklasse reeller Zahlen unter der Äquivalenzrelation $\varphi_1 \sim \varphi_2$, falls $\varphi_1 - \varphi_2 \in 2\pi\mathbb{Z}$. Anstatt $\varphi \in \arg z$ schreiben wir aber in der Regel $\varphi = \arg z$. Mit $\operatorname{Arg} z$ bezeichnen wir den *Hauptwert* des Arguments von z, d.h. dasjenige Argument im Intervall $(-\pi, \pi]$.

Aus dem Additionstheorem für die Exponentialfunktion erhalten wir für $z = re^{i\varphi}$ und $w = se^{i\psi} \in \mathbb{C}$

$$zw = rse^{i(\varphi+\psi)}\,.$$

Dieses Ergebnis liefert uns für die Multiplikation komplexer Zahlen ebenfalls eine geometrische Interpretation: Die Beträge werden multipliziert und die Argumente (Winkel) addiert. Insbesondere liefert die Multiplikation mit $e^{i\varphi}$ eine Drehung der Ebene um den Winkel φ.

Hieraus folgt weiter

$$\frac{1}{z} = \frac{1}{r}\, e^{-i\varphi}\,.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ erhält man mit vollständiger Induktion

$$z^n = r^n e^{in\varphi}$$

und speziell

$$(\cos\varphi + i\sin\varphi)^n = \cos n\varphi + i\sin n\varphi\,.$$

Diese Formel heißt Formel von de Moivre.

Historie: Abraham de Moivre, französischer Mathematiker, 1667 − 1754)

Wir wollen nun zu gegebenem $w \in \mathbb{C}$ und $n \in \mathbb{N}$ alle komplexen Lösungen z der Gleichung

$$z^n = w$$

finden. Für $w = 0$ ist offenbar $z = 0$ die einzige Lösung. Es sei daher $w \neq 0$ und

$$w = se^{i\psi}\,.$$

Wir machen für z den Ansatz

$$z = re^{i\varphi}\,.$$

Dann folgt

$$r^n e^{in\varphi} = se^{i\psi}\,.$$

Durch Vergleich der Beträge und Argumente folgt hieraus $r = \sqrt[n]{s}$ und $n\varphi = \psi + 2k\pi$ mit $k \in \mathbb{Z}$. Aufgrund der Periodizität von exp erhält man, dass die unendlich vielen Zahlen $\varphi_k := \frac{\psi+2k\pi}{n}$ nur n voneinander verschiedene Werte für $e^{i\varphi_k}$ liefern. Man kann also $k = 0, 1, \ldots, n-1$ wählen.

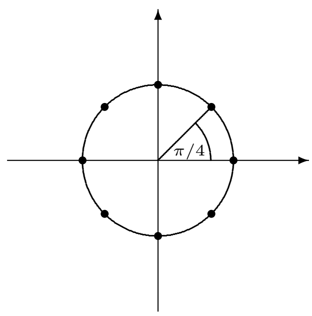
Für $w = se^{i\psi} \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ besitzt die Gleichung $z^n = w$ genau n verschiedene Lösungen $z_0, z_1, \ldots, z_{n-1}$. Diese sind gegeben durch

$$z_k = \sqrt[n]{s}e^{i\varphi_k} \quad \text{mit} \quad \varphi_k = \frac{\psi + 2k\pi}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n\,.$$

Wichtige Beispiele sind die so genannten n-*ten Einheitswurzeln*, d.h. die Lösungen der Gleichung $z^n = 1$. Mit $s = 1$ und $\psi = 0$ folgt für die Lösungen

$$z_k = \exp \tfrac{2k\pi i}{n}\,, \quad k = 0, 1, \ldots, n-1\,.$$

Die n-ten Einheitswurzeln liegen auf dem Einheitskreis und bilden die Ecken eines regelmäßigen n-Ecks. In der Abbildung ist dies für $n = 8$ veranschaulicht.



Während die reelle Exponentialfunktion eine Umkehrfunktion besitzt ist dies wegen der $2\pi i$-Periodizität für die komplexe Exponentialfunktion nicht der Fall. Aber der Parallelstreifen

$$S := \{\, z \in \mathbb{C} : |\operatorname{Im} z| < \pi \,\}$$

wird bijektiv auf $C_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ abgebildet. Daher besitzt exp eine in C_- definierte Umkehrfunktion $\operatorname{Log}\colon C_- \to S$. Diese heißt der *Hauptzweig des Logarithmus*. Es gilt

$$\operatorname{Log} z = \log |z| + i \operatorname{Arg} z\,.$$

Aus der auch im Komplexen gültigen Formel für die Ableitung der Umkehrfunktion folgt

$$\operatorname{Log}' z = \frac{1}{z}\,, \quad z \in C_-\,.$$

Für $n \in \mathbb{N}$ sei $f_n\colon \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ definiert durch $f_n(z) := z^n$. Weiter betrachten wir den Winkelraum

$$W_n := \left\{\, re^{i\varphi} \in \mathbb{C} : r > 0\,,\ |\varphi| < \tfrac{\pi}{n} \,\right\}\,.$$

Dann ist f_n holomorph in $\mathbb{C}$ und bildet W_n bijektiv auf $\mathbb{C}_- := \mathbb{C} \setminus (-\infty, 0]$ ab. Daher existiert eine Umkehrfunktion $g_n\colon \mathbb{C}_- \to W_n$ und wir schreiben $g_n(z) = w^{1/n}$. g_n heißt *Hauptzweig* der n-ten Wurzel. Es ist g_n holomorph in $\mathbb{C}_-$ und für die Ableitung gilt $g_n'(z) = \frac{1}{n}\, z^{1/n-1}$.

Allgemeiner definiert man noch für $\alpha \in \mathbb{R}$

$$z^\alpha := e^{\alpha \operatorname{Log} z}\,, \quad z \in \mathbb{C}_-\,.$$