4.3 Existenz- und Eindeutigkeitssatz von Picard-Lindelöf

Wir betrachten ein Differentialgleichungssystem der Form

$$Y' = F(x, Y)\,,$$

wobei $Y = (y_1, \dots, y_n)^\top$, $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion von $n+1$ Variablen und $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ ein Gebiet ist. Wir stellen noch die Anfangsbedingung

$$Y(x_0) = Y_0\,.$$

Wir wollen nun untersuchen unter welchen Bedingungen an F dieses Anfangswertproblem eine eindeutige Lösung besitzt. Dazu benötigen wir als Hilfsmittel den Banachschen Fixpunktsatz.

Satz 4.3.1 (Banachscher Fixpunktsatz)**.** *Es sei $X = (X, d)$ ein vollständiger metrischer Raum und $g\colon X \to X$ eine kontrahierende Abbildung, d.h. es gibt ein $q \in (0,1)$ mit*

$$d(g(x), g(y)) \le q d(x, y)$$

für alle x, $y \in X$. Dann besitzt g genau einen Fixpunkt $x^* \in X$, d.h. die Gleichung $g(x) = x$ besitzt genau eine Lösung $x^* \in X$.

Wählt man $x_0 \in X$ beliebig und definiert man die Folge (x_n) in X rekursiv durch

$$x_{n+1} := g(x_n)\,, \quad n \in \mathbb{N}_0\,,$$

so konvergiert (x_n) gegen x^*. Weiter gelten die Fehlerabschätzungen

$$d(x^*, x_n) \le \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0)$$

und

$$d(x^*, x_n) \le \frac{q}{1-q}\, d(x_n, x_{n-1})$$

für alle $n \in \mathbb{N}$.

Beweis. Wir zeigen zunächst die Eindeutigkeitsaussage. Es seien x^* und z zwei verschiedene Fixpunkte von g. Dann gilt

$$d(x^*, z) = d(g(x^*), g(z)) \le q d(x^*, z) < d(x^*, z)\,,$$

was ein Widerspruch ist.

Nun zeigen wir die Existenz eines Fixpunktes. Dazu zeigen wir zunächst, dass (x_n) eine Cauchy-Folge ist. Wir behaupten

$$(*) \qquad d(x_{n+1}, x_n) \leq q^n d(x_1, x_0)$$

für alle $n \in \mathbb{N}_0$. Wir beweisen $(*)$ mit vollständiger Induktion. Für $n = 0$ ist $(*)$ offenbar richtig. Nun gelte $(*)$ für ein $n \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$d(x_{n+2}, x_{n+1}) = d(g(x_{n+1}), g(x_n)) \leq qd(x_{n+1}, x_n) \leq q^{n+1}d(x_1, x_0))$$

und daher gilt $(*)$ auch für $n + 1$.

Für $k \in \mathbb{N}$ folgt nun aus $(*)$ und der Dreiecksungleichung

$(**)$

$$\begin{aligned} d(x_{n+k}, x_n) &\leq d(x_{n+k}, x_{n+k-1}) + d(x_{n+k-1}, x_{n+k-2}) + \cdots + d(x_{n+2}, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x_n) \\ &\leq (q^{n+k-1} + q^{n+k-2} + \cdots + q^{n+1} + q^n)d(x_1, x_0) \\ &= q^n(1 + q + q^2 + \cdots + q^{k-1})d(x_1, x_0) \leq \frac{q^n}{1-q}\, d(x_1, x_0)\,. \end{aligned}$$

Hierbei haben wir $q < 1$ und die geometrische Reihe benutzt. Wegen $q < 1$ gilt $q^n \to 0$ $(n \to \infty)$ und daher ist (x_n) eine Cauchy-Folge. Da X vollständig ist, konvergiert also (x_n) gegen ein $x^* \in X$.

Da die kontrahierende Abbildung g offensichtlich stetig ist, folgt

$$g(x^*) = g\left(\lim_{n\to\infty} x_n\right) = \lim_{n\to\infty} g(x_n) = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = x^*$$

und daher ist x^* ein Fixpunkt von g.

Die erste Fehlerabschätzung ergibt sich sofort durch Grenzübergang $k \to \infty$ in $(**)$, und aus $(*)$ folgt

$$\begin{aligned} d(x_n, x^*) &\leq d(x_n, x_{n+1}) + d(x_{n+1}, x^*) = d(g(x_{n-1}), g(x_n)) + d(g(x_n), g(x^*)) \\ &\leq qd(x_n, x_{n-1}) + qd(x_n, x^*)\,. \end{aligned}$$

Auflösen nach $d(x_n, x^*)$ liefert dann die zweite Fehlerabschätzung. $\square$

Historie: Stefan Banach, polnischer Mathematiker, 1892 – 1945.

Die erste Fehlerabschätzung nennt man eine *a priori Abschätzung*, denn sie liefert eine Vorab-Kontrolle des Fehlers und damit eine Schätzung der notwendigen Rechenschritte. Die zweite Fehlerabschätzung nennt man eine *a posteriori Abschätzung*, denn sie erlaubt es, im Laufe der Rechnung zu entscheiden, ob die erforderliche Genauigkeit bereits ausreicht und das Verfahren abgebrochen werden kann. Solche Abschätzungen sind oft genauer.

Der Banachsche Fixpunktsatz hat vielerlei Anwendungen, nicht nur in der Theorie der Differentialgleichungen.

Wir führen zunächst noch eine Bezeichnung ein. Ist $F := (f_1, \ldots, f_n)^\top\colon [a,b] \to \mathbb{R}^n$ eine vektorwertige Funktion und sind $f_1, \ldots, f_n$ Riemann-integrierbar (oder Lebesgue-integrierbar) auf $[a,b]$ so setzen wir

$$\int_a^b F(t)\,dt := \left(\int_a^b f_1(t)\,dt, \ldots, \int_a^b f_n(t)\,dt\right)^\top \in \mathbb{R}^n\,.$$

Satz 4.3.2 (Satz von Picard-Lindelöf). *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein kompaktes Intervall, $D \subset \mathbb{R}^n$ ein Gebiet, $\Omega := I \times D$, $x_0 \in I$, $Y_0 \in D$ und $F\colon \Omega \to \mathbb{R}^n$ stetig in Ω. Weiter erfülle F eine* Lipschitz-*Bedingung*

$$\|F(x,Y_1) - F(x,Y_2)\|_2 \le L\|Y_1 - Y_2\|_2$$

für alle $x \in I$ und Y_1, $Y_2 \in D$, wobei $L > 0$ eine Konstante ist. Dann gibt es ein $\delta > 0$ so, dass das Anfangswertproblem

$$Y' = F(x,Y)\,, \quad Y(x_0) = Y_0$$

genau eine Lösung $Y\colon I_0 := I \cap \overline{U_\delta(x_0)} \to \mathbb{R}^n$ hat. Im Fall $D = \mathbb{R}^n$ kann man $I_0 = I$ wählen.

Beweis. Wir formen das Anfangswertproblem zunächst in ein Fixpunktproblem um. Dazu integrieren wir die Gleichung

$$Y'(t) = F(t, Y(t))$$

nach t und erhalten für $x \in I$

$$\int_{x_0}^x Y'(t)\,dt = \int_{x_0}^x F(t,Y(t))\,dt\,.$$

Aus dem Hauptsatz der Differential- und Integralrechnung (komponentenweise angewandt) folgt

$$\int_{x_0}^{x} Y'(t)\,dt = Y(x) - Y(x_0) = Y(x) - Y_0$$

und daher

$$(*) \qquad Y(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, Y(t))\,dt\,.$$

Umgekehrt zeigt man durch Differenzieren, dass jede Lösung dieser Integralgleichung für Y eine Lösung des ursprünglichen Anfangswertproblems liefert.

Ist $D = \mathbb{R}^n$, so wählen wir $I_0 := I$. Andernfalls wählen wir $b > 0$ mit $\overline{U_b(Y_0)} \subset D$ und setzen $I_0 := I \cap \overline{U_\delta(x_0)}$ mit

$$\delta := b \left(\max_{(x,Y) \in I \times \overline{U_b(Y_0)}} \|F(x,Y)\|_2 \right)^{-1}\,.$$

Wir betrachten nun den BANACH-Raum $C(I_0, \mathbb{R}^n)$ mit der Norm

$$\|Y\|_\infty = \max_{x \in I_0} \|Y(x)\|_2\,.$$

Zunächst sei $D = \mathbb{R}^n$. Wir betrachten dann den Operator $T\colon C(I_0, \mathbb{R}^n) \to C(I_0, \mathbb{R}^n)$ mit

$$(TY)(x) := Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, Y(t))\,dt\,.$$

Wir müssen zeigen, dass T genau einen Fixpunkt $Y \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$ hat. Es folgt für Y, $Z \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$ und $x \in I_0$

$$\begin{aligned}
\|(TY)(x) - (TZ)(x)\|_2 &= \left\| \int_{x_0}^{x} [F(t, Y(t)) - F(t, Z(t))]\,dt \right\|_2 \\
&\le L \left| \int_{x_0}^{x} \|Y(t) - Z(t))\|_2\,dt \right| \\
&\le |x - x_0| L \|Y - Z\|_\infty \le L|I_0| \|Y - Z\|_\infty\,,
\end{aligned}$$

also

$$\|TY - TZ\|_\infty \le L|I_0| \|Y - Z\|_\infty\,,$$

wobei $|I_0|$ die Länge des Intervalls I_0 bezeichnet. Ist $L|I_0| < 1$, so ist T eine kontrahierende Abbildung und die Behauptung folgt aus dem BANACHschen Fixpunktsatz.

Im Fall $L|I_0| \geq 1$ verwenden wir auf $C(I_0, \mathbb{R}^n)$ die äquivalente Norm

$$\|Y\|_L = \max_{x \in I_0} \left[\|Y(x)\|_2 e^{-2L|x-x_0|} \right].$$

Dann folgt für Y, $Z \in C(I_0, \mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned} \|(TY)(x) - (TZ)(x)\|_2 &\leq L \left| \int_{x_0}^{x} (\|Y(t) - Z(t))\|_2 e^{-2L|t-x_0|}) e^{2L|t-x_0|}\, dt \right| \\ &\leq L\|Y - Z\|_L \left| \int_{x_0}^{x} e^{2L|t-x_0|}\, dt \right| \leq L\|Y - Z\|_L \frac{e^{2L|x-x_0|}}{2L} \end{aligned}$$

und daher

$$\|TY - TZ\|_L \leq \frac{1}{2} \|Y - Z\|_L .$$

Nun folgt die Behauptung wieder aus dem Banachschen Fixpunktsatz.

Schließlich sei $D \neq \mathbb{R}^n$. Dann betrachten wir den Operator T auf der Menge

$$X := \{ Y \in C(I_0, \mathbb{R}^n) : Y(I_0) \subset \overline{U_b(Y_0)} \}.$$

Da $\overline{U_b(Y_0)}$ eine abgeschlossene Menge ist, ist auch X abgeschlossen in $C(I_0, \mathbb{R}^n)$ und daher ein vollständiger metrischer Raum. Für $Y \in X$ und $x \in I_0$ gilt

$$\|(TY)(x) - Y_0\|_2 = \left\| \int_{x_0}^{x} F(t, Y(t))\, dt \right\|_2 \leq \delta \max_{(x,Y) \in I \times \overline{U_b(Y_0)}} \|F(x, Y)\|_2 = b ,$$

d.h. $(TY)(x) \in \overline{U_b(Y_0)}$ und daher ist $TY \in X$. Wie oben zeigt man, dass auch in diesem Fall T eine kontrahierende Abbildung ist, und die Behauptung folgt erneut aus dem Banachschen Fixpunktsatz. □

Historie: Charles Émile Picard, französischer Mathematiker, 1856 – 1941.
Ernst Leonard Lindelöf, finnischer Mathematiker, 1870 – 1946.
Rudolf Otto Sigismund Lipschitz, deutscher Mathematiker, 1832 – 1903.

Bemerkungen 4.3.3. (a) Der Beweis des Satzes von Picard-Lindelöf ist *konstruktiv*. Wählen wir eine geeignete Startfunktion Y_0, z.B. die konstante Funktion $Y(x) := Y_0$ (Anfangswert) und definieren wir die Funktionenfolge (Y_k) auf I_0 durch

$$Y_{k+1}(x) = Y_0 + \int_{x_0}^{x} F(t, Y_k(t))\, dt ,$$

so konvergiert (Y_k) gleichmäßig auf I_0 gegen die Lösung Y.

(b) Wir betrachten hierzu ein konkretes Beispiel, nämlich

$$y' = y\,, \quad y(0) = 1\,.$$

In diesem Fall ist $y_0(x) = 1$ und

$$y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x y_k(t)\,dt\,.$$

Wir zeigen mit vollständiger Induktion, dass für $k \in \mathbb{N}_0$ und $x \in \mathbb{R}$ gilt

$$(*) \qquad y_k(x) = \sum_{j=0}^{k} \frac{x^j}{j!}\,.$$

Für $k = 0$ ist dies offensichtlich richtig. Nun gelte $(*)$ für ein $k \in \mathbb{N}_0$. Dann folgt

$$y_{k+1}(x) = 1 + \int_0^x \sum_{j=0}^{k} \frac{t^j}{j!}\,dt = 1 + \sum_{j=0}^{k} \int_0^x \frac{x^j}{j!}\,dt = 1 + \sum_{j=0}^{k} \frac{x^{j+1}}{(j+1)!} = \sum_{j=0}^{k+1} \frac{x^j}{j!}\,,$$

d.h. $(*)$ gilt auch für $k+1$. Daher folgt, dass (y_k) auf jedem kompakten Intervall $[a,b]$ gleichmäßig gegen die Lösung $y(x) = e^x$ konvergiert.

(c) Ist $f \in C^k(\Omega, \mathbb{R}^n)$, so folgt sofort, dass $Y \in C^{k+1}(I_0, \mathbb{R}^n)$.

Der Satz von Picard-Lindelöf ist ein *lokaler* Existenz- und Eindeutigkeitssatz. Man kann noch zeigen, dass es unter diesen Voraussetzungen immer ein maximales Existenzintervall für die Lösung gibt, indem man die lokale Lösung fortsetzt. Eine solche Lösung nennt man dann *maximale Lösung*.

Die Lösung eines Differentialgleichungssystems kann man auch als Kurve in $\mathbb{R}^n$ auffassen. Eine solche Kurve nennt man *Integralkurve*.

Wir haben bereits gesehen (Beispiel 4.2.4), dass das Existenzintervall und auch die Geometrie der Lösung stark von der Anfangsbedingung abhängen kann. Außerdem zeigt Beispiel 4.2.5, dass die Eindeutigkeit verloren gehen kann, wenn die Lipschitz-Bedingung nicht erfüllt ist. Man kann die Existenz einer Lösung aber noch nachweisen, wenn die Funktion F nur stetig ist. Dies ist der Existenzsatz von Peano. (Historie: Giuseppe Peano, italienischer Mathematiker, 1858 – 1932.)

Wir betrachten jetzt speziell lineare Differentialgleichungssysteme. Diese sind von der Form

$$Y' = A(x)Y + b(x)\,.$$

Dabei ist $A(x)$ eine $(n \times n)$-Matrix, deren Elemente a_{jk} reellwertige stetige Funktionen auf einem Intervall I sind. Wir schreiben dafür $A \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$. Weiter ist $b\colon I \to \mathbb{R}^n$ eine stetige Funktion.

Satz 4.3.4. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $x_0 \in I$, $Y_0 \in \mathbb{R}^n$, $A \in C(I, \mathbb{R}^{n \times n})$ und $b \in C(I, \mathbb{R}^n)$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$Y' = A(x)Y + b(x)\,, \quad Y(x_0) = Y_0$$

genau eine Lösung $Y \in C^1(I, \mathbb{R}^n)$.

Beweis. Für jedes $x \in I$ ist $T_x\colon \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ mit $T_x(X) := A(x)X$ eine lineare Abbildung, und es gilt

$$\|T_x(X)\|_2 \le \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}(x)|^2 \right)^{1/2} \|X\|_2\,.$$

Nun sei J ein kompaktes Teilintervall von I mit $x_0 \in J$. Dann gibt es wegen der Stetigkeit von a_{jk} und b eine Konstante $L > 0$ mit

$$\max_{x \in J} \left(\sum_{j=1}^{m} \sum_{k=1}^{n} |a_{jk}(x)|^2 \right)^{1/2} \le L\,.$$

Setzen wir $F(x, Y) := A(x)Y + b(x)$, so folgt für $x \in J$ und Y_1, $Y_2 \in \mathbb{R}^n$

$$\|F(x, Y_1) - F(x, Y_2)\|_2 = \|A(x)(Y_1 - Y_2)\|_2 \le L\|Y_1 - Y_2\|_2\,.$$

Nach dem Satz von Picard-Lindelöf besitzt das Anfangswertproblem also genau eine Lösung, die auf ganz J existiert. Da dies für alle kompakten Intervalle $J \subset I$ mit $x_0 \in J$ gilt, folgt aus der Eindeutigkeit, dass auf ganz I genau eine Lösung existiert. $\square$