13.4 Lineare Differentialgleichungen n-ter Ordnung

Diese sind von der Form

$$\text{(L)} \qquad L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = g(x)$$

mit stetigen Funktionen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ und g auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$. Man beachte, dass $y, y', \ldots, y^{(n)}$ nur linear vorkommen. Ist $g = 0$, so heißt die Differentialgleichung *homogen*, d.h.

$$\text{(H)} \qquad L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y = 0$$

ansonsten *inhomogen* und g heißt *Störfunktion*. Die Funktionen $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ heißen die *Koeffizienten* der Differentialgleichung.

Man kann auch hier Anfangswerte vorschreiben, nämlich

$$y(x_0) = \eta_0\,,\ y'(x_0) = \eta_1\,, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$$

mit $x_0 \in I$ und $\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1} \in \mathbb{R}$.

13.4.1 Existenz- und Eindeutigkeitssatz

Satz 13.4.1. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall, $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, $g \in C(I)$, $x_0 \in I$ und $(\eta_0, \eta_1, \ldots, \eta_{n-1})^\top \in \mathbb{R}^n$. Dann besitzt das Anfangswertproblem*

$$(*) \qquad L[y] = g(x)\,, \quad y(x_0) = \eta_0\,,\ y'(x_0) = \eta_1\,, \ldots,\ y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$$

genau eine Lösung $y \in C^n(I)$.

Beweis. Wir setzen $y_1 := y$, $y_2 := y'$, $\ldots$, $y_n := y^{(n-1)}$. Ist nun y eine Lösung von $(*)$, so gilt

$$\begin{aligned}
y_1' &= y_2\,,\\
y_2' &= y_3\,,\\
&\ \vdots\\
y_{n-1}' &= y_n\,,\\
y_n' &= -a_0(x)y_1 - a_1(x)y_2 - \cdots - a_{n-1}(x)y_n + g(x)
\end{aligned}$$

und $y_k(x_0) = \eta_{k-1}$ für $k = 1, \ldots, n$. Also löst $Y := (y_1, \ldots, y_n)$ das Anfangswertproblem

$$(**) \qquad Y' = A(X)Y + b(x)\,, \quad Y(x_0) = (\eta_0, \ldots, \eta_{n-1})^\top$$

für lineare Differentialgleichungssysteme, wobei

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ldots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \ldots & 1 \\ -a_0(x) & -a_1(x) & -a_2(x) & \ldots & -a_{n-1}(x) \end{pmatrix}, \quad b(x) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ g(x) \end{pmatrix}.$$

Nach Satz 13.3.4 besitzt $(**)$ genau eine Lösung $Y = (y_1, \ldots, y_n)^\top$. Setzen wir nun $y := y_1$, so folgt entsprechend, dass y eine Lösung von $(*)$ ist. □

13.4.2 Homogene lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten jetzt die homogene Differentialgleichung (H) und wollen die Lösungsmenge genauer untersuchen. Dazu ist der folgende Begriff nützlich.

Definition 13.4.2. Es seien $y_1, \ldots, y_m \in C^{m-1}(I)$. Dann heißt

$$W(x) = W(y_1, \ldots, y_m)(x) := \det \begin{pmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_m(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) & \ldots & y_m'(x) \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ y_1^{(m-1)}(x) & y_2^{(m-1)}(x) & \ldots & y_n^{(m-1)}(x) \end{pmatrix}$$

die *Wronski-Determinante* von $\{y_1, \ldots, y_m\}$.

Historie: Joseph Marie Wronski, polnischer Philosoph und Mathematiker, 1778 – 1853.

Satz 13.4.3. *Es seien $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen von* (H) *und W die Wronski-Determinante von $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Dann sind die folgenden Aussagen äquivalent:*

(a) *$y_1, \ldots, y_n$ sind linear unabhängig.*

(b) *$W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$.*

(c) *$W(x_0) \neq 0$ für ein $x_0 \in I$.*

Beweis. Es gelte (a). Wir nehmen an, dass (b) nicht gilt, d.h. es gibt ein $x_0 \in I$ mit $W(x_0) = 0$. Dann besitzt das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) &= 0\,, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) &= 0\,, \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0\,. \end{aligned}$$

eine nicht-triviale Lösung. Setzen wir $y := c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0$, so ist y eine Lösung von (H) mit $y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(m-1)}(x_0) = 0$ und daher $y = 0$ wegen der Eindeutigkeit der Lösung. Also gilt

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0\,,$$

d.h. $y_1, \ldots, y_n$ sind linear abhängig, was ein Widerspruch ist.

Die Implikation (b) $\Longrightarrow$ (c) ist offensichtlich richtig.

Nun gelte (c) und es seien $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$ mit

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n = 0\,.$$

Dann gilt

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$$

für alle $x \in I$. Durch Ableiten und Einsetzen von $x = x_0$ erhalten wir das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} c_1 y_1(x_0) + c_2 y_2(x_0) + \ldots + c_n y_n(x_0) &= 0\,, \\ c_1 y_1'(x_0) + c_2 y_2'(x_0) + \ldots + c_n y_n'(x_0) &= 0\,, \\ &\vdots \\ c_1 y_1^{(n-1)}(x_0) + c_2 y_2^{(n-1)}(x_0) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(x_0) &= 0\,. \end{aligned}$$

Da $W(x_0) \neq 0$ ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und daher folgt $c_1 = \cdots = c_n = 0$. Also sind $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig. $\square$

Der Beweis zeigt, dass die Implikationen (b) $\Longrightarrow$ (c), (c) $\Longrightarrow$ (a) und (b) $\Longrightarrow$ (a) immer gelten, d.h. auch wenn $y_1, \ldots, y_m$ keine Lösungen einer homogenen linearen

Differentialgleichung sind. Alle anderen Implikationen sind im Allgemeinen aber falsch wie die folgenden beiden Beispiele zeigen.

Wir definieren y_1, $y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch $y_1(x) := x$ und $y_2(x) := x^2$. Man zeigt leicht, dass y_1, y_2 linear unabhängig sind. Weiter gilt

$$W(x) = \det \begin{pmatrix} x & x^2 \\ 1 & 2x \end{pmatrix} = x^2 \,,$$

also $W(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ aber $W(0) = 0$.

Wir definieren y_1, $y_2 \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch

$$y_1(x) := \begin{cases} 0 & \text{für } x \leq 0 \,, \\ x^2 & \text{für } x > 0 \,, \end{cases} \qquad y_2(x) := \begin{cases} x^2 & \text{für } x \leq 0 \,, \\ 0 & \text{für } x > 0 \,. \end{cases}$$

Man zeigt leicht, dass y_1, y_2 linear unabhängig sind. Aber es gilt $W(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.

Satz 13.4.4. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in C(I)$. Dann ist die Lösungsmenge der Differentialgleichung* (H) *ein n-dimensionaler linearer Unterraum des Vektorraums $C^n(I)$.*

Beweis. Wir betrachten den Differentialoperator $L \colon C^n(I) \to C(I)$ mit

$$L[y] := y^{(n)} + a_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + a_1(x)y' + a_0(x)y \,.$$

Man rechnet leicht nach, dass L eine lineare Abbildung ist. Die Lösungsmenge $N(L)$ von (H) ist dann gerade der Kern von L und daher ein Unterraum von $C^n(I)$.

Wir müssen also nur noch zeigen, dass $\dim N(L) = n$ ist. Dazu konstruieren wir eine Basis von $N(L)$ wie folgt. Wir betrachten für $k = 1, \ldots, n$ die Anfangswertprobleme

$$L[y] = 0 \,, \quad y^{(j-1)}(x_0) = \delta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{für } j = k \,, \\ 0 & \text{für } j \neq k \,, \end{cases} \qquad j = 1, \ldots, n \,.$$

Jedes dieser Anfangswertprobleme besitzt nach Satz 13.4.1 genau eine Lösung $y_k \in C^n(I)$. Für die Wronski-Determinante von $y_1, \ldots, y_n$ gilt offensichtlich $W(x_0) = 1$ und daher sind $y_1, \ldots, y_n$ linear unabhängig.

Nun sei y eine beliebige Lösung von (H). Wir setzen $c_k := y^{(k-1)}(x_0)$ für $k = 1, \ldots, n$ und

$$\tilde{y} := c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \,.$$

Dann ist auch $\tilde{y}$ eine Lösung von (H) mit den gleichen Anfangswerten wie y. Wegen der eindeutigen Lösbarkeit eines Anfangswertproblems folgt $\tilde{y} = y$ und daher

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n \,.$$

Also ist $\{y_1, \ldots, y_n\}$ eine Basis von $N(L)$ und daher $\dim N(L) = n$. $\square$

Bemerkungen 13.4.5. (a) Eine Basis $\{y_1, \ldots, y_n\}$ des Lösungsraums von (H) nennt man auch ein *Fundamentalsystem* von (H).

(b) Ist $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem von (H), so ist jede beliebige Lösung y von (H) gegeben durch

$$y = c_1 y_1 + \ldots + c_n y_n$$

mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Man nennt dies auch die *allgemeine Lösung* von (H).

(c) Ist y eine Lösung von (H) mit $y(x_0) = y'(x_0) = \cdots = y^{(m-1)}(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in I$, so ist $y(x) = 0$ für alle $x \in I$.

Bisher haben wir noch keine Methode kennen gelernt, wie man ein Fundamentalsystem konstruieren kann. Dies ist im Allgemeinen ein schwieriges Problem, selbst bei sehr einfach aussehenden Differentialgleichungen wie z.B. $y'' + xy = 0$.

Bei homogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, d.h.

$$y' + f(x)y = 0$$

mit einer stetigen Funktion f auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ ist die Konstruktion eines Fundamentalsystems sehr einfach, denn dies ist eine Differentialgleichung mit getrennten Variablen und Integration liefert

$$\int \frac{dy}{y} = -\int f(x)\, dx \,.$$

Ist F eine Stammfunktion von f, so folgt

$$\log|y| = -F(x) + \log|c| \,,$$

und wir erhalten als allgemeine Lösung

$$y(x) = ce^{-F(x)} \,, \quad c \in \mathbb{R} \,,\ x \in I \,.$$

13.4.3 Inhomogene lineare Differentialgleichungen

Wir betrachten jetzt die inhomogene Differentialgleichung (L) und wollen die Lösungsmenge genauer untersuchen.

Satz 13.4.6. *Es seien $I \subset \mathbb{R}$ ein Intervall und $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$, $g \in C(I)$. Dann ist die Lösungsmenge $\mathbb{L}$ der Differentialgleichung* (L) *ein n-dimensionaler affiner Unterraum des Vektorraums $C^n(I)$. Genauer gilt*: *Es gibt eine Lösung y_0 von* (L) *so, dass*

$$\mathbb{L} = y_0 + N(L) = \{ y_0 + y_h : y_h \in N(L) \} .$$

Beweis. Ist y_0 eine Lösung von (L), y_h eine Lösung von (H) und $y := y_0 + y_h$, so folgt wegen der Linearität des Operators L

$$L[y] = L[y_0 + y_h] = L[y_0] + L[y_h] = g + 0 = g ,$$

d.h. y ist eine Lösung von (L).

Sind y, y_0 Lösungen von (L) und $y_h := y - y_0$, so folgt wieder aus der Linearität des Operators L

$$L[y_h] = L[y - y_0] = L[y] - L[y_0] = g - g = 0 ,$$

d.h. y ist eine Lösung von (H). □

Ist also $y_1, \ldots, y_n$ ein Fundamentalsystem von (H) und y_0 eine Lösung von (L), so ist jede Lösung y von (L) von der Form

$$y = y_0 + c_1 y_1 + \cdots + c_n y_n$$

mit $c_1, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$. Man nennt dies auch die *allgemeine Lösung* von (L) und y_0 eine *partikuläre Lösung* von (L).

Es stellt sich nun die Frage wie man eine partikuläre Lösung von (L) findet, wenn ein Fundamentalsystem von (H) bekannt ist. Hierzu kann man wie schon bei linearen Differentialgleichungen erster Ordnung die Methode der Variation der Konstanten benutzen.

Satz 13.4.7. *Es sei $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem von* (H) *und W die Wronski-Determinante von $\{y_1, \ldots, y_n\}$. Für $k = 1, \ldots, n$ sei W_k die Determinante, die entsteht, wenn man die k-te Spalte von W durch $(0, \ldots, 0, 1)^\top$ ersetzt, d.h.*

$$W_k(x) = W_k(y_1, \ldots, y_n)(x) = (-1)^{k+n} W(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n) .$$

Dann ist mit $x_0 \in I$

$$y_0(x) := \sum_{k=1}^{n} y_k(x) \int_{x_0}^{x} \frac{W_k(t)}{W(t)}\, g(t)\, dt$$

eine Lösung von (L).

Beweis. Wir machen für y_0 den Ansatz

$$y_0(x) = c_1(x)y_1(x) + \cdots + c_n(x)y_n(x)$$

mit noch unbekannten Funktionen $c_1, \ldots, c_n$. Wir fordern für diese Funktionen

$$\begin{aligned}
&(1) && c_1'(x)y_1(x) + \cdots + c_n'(x)y_n(x) = 0\,,\\
&(2) && c_1'(x)y_1'(x) + \cdots + c_n'(x)y_n'(x) = 0\,,\\
& && \vdots\\
&(n-1) && c_1'(x)y_1^{(n-2)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-2)}(x) = 0\,.
\end{aligned}$$

Dies sind insgesamt $(n-1)$ Gleichungen. Wir leiten den Ansatz für y_0 nun n-mal ab und erhalten unter Berücksichtigung der obigen Forderungen

$$\begin{aligned}
y_0'(x) &= c_1(x)y_1'(x) + \cdots + c_n(x)y_n'(x)\,,\\
y_0''(x) &= c_1(x)y_1''(x) + \cdots + c_n(x)y_n''(x)\,,\\
&\vdots\\
y_0^{(n-1)}(x) &= c_1(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n-1)}(x)\,.\\
y_0^{(n)}(x) &= c_1(x)y_1^{(n)}(x) + \cdots + c_n(x)y_n^{(n)}(x) + c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x)\,.
\end{aligned}$$

Setzt man dies nun in die Differentialgleichung (L) ein, so erhält man unter Berücksichtigung, dass $y_1, \ldots, y_n$ Lösungen von (H) sind

$$(n) \qquad c_1'(x)y_1^{(n-1)}(x) + \cdots + c_n'(x)y_n^{(n-1)}(x) = g(x)\,.$$

Die Gleichungen (1) – (n) liefern ein lineares Gleichungssystem für $c_1', \ldots, c_n'$, dessen Koeffizientenderminante gerade die Wronski-Determinante von $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ist. Da $\{y_1, \ldots, y_n\}$ ein Fundamentalsystem ist, gilt $W(x) \neq 0$ für alle $x \in I$. Daher ist das Gleichungssystem eindeutig lösbar und die Cramersche Regel liefert dann die Behauptung. □

Bei inhomogenen linearen Differentialgleichungen erster Ordnung, d.h.

$$y' + f(x)y = g(x)$$

mit stetigen Funktion f, g auf einem Intervall $I \subset \mathbb{R}$ lautet der Ansatz

$$y(x) = c(x)e^{-F(x)}\,.$$

und man erhält dann

$$c(x) = \int g(x)e^{F(x)}\,dx\,.$$

Also ist

$$y_p(x) = e^{-F(x)} \int g(x)e^{F(x)}\,dx$$

eine spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung.

Beispiel . Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y' - \frac{2x}{x^2+1}\,y = x^2\,.$$

Es ist $f(x) = -\frac{2x}{x^2+1}$, $F(x) = -\log(x^2+1)$, also $y_h(x) = c(x^2+1)$. Zur Lösung der inhomogenen Differentialgleichung verwenden wir Variation der Konstanten, also Ansatz $y(x) = c(x)(x^2+1)$. Ableiten und einsetzen ergibt $y'(x) = c'(x)(x^2+1) + 2xc(x)$ und

$$c'(x)(x^2+1) + 2xc(x) - 2xc(x) = c'(x)(x^2+1) = x^2\,.$$

Hieraus folgt

$$c'(x) = \frac{x^2}{x^2+1}\,,$$

also

$$c(x) = \int \frac{x^2}{x^2+1}\,dx = \int \frac{(x^2+1)-1}{x^2+1}\,dx = \int dx - \int \frac{dx}{x^2+1} = x - \arctan x + c\,.$$

Daher lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = (x^2+1)(c + x - \arctan x)\,, \quad c \in \mathbb{R}\,,\ x \in \mathbb{R}\,.$$

Stellen wir noch das Anfangswertproblem $y(0) = 1$, so folgt $c = 1$ und daher

$$y(x) = (x^2+1)(1 + x - \arctan x)\,, \quad x \in \mathbb{R}\,.$$

Beispiele linearer Differentialgleichungen höherer Ordnung behandeln wir im nächsten Abschnitt.

13.4.4 Lineare Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten

Problem: Wie findet man ein Fundamentalsystem der Differentialgleichung (H)? Dies ist im allgemeinen schwierig. Wir behandeln dieses Problem nur für konstante Koeffizientenfunktionen. Eine solche Differentialgleichung nennt man eine *lineare Differentialgleichung mit konstanten Koeffizienten.* Wir betrachten also

$$\text{(H)} \qquad L[y] = y^{(n)} + a_{n-1}y^{(n-1)} + \cdots + a_1 y' + a_0 y = 0$$

mit $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1} \in \mathbb{R}$.

Wir haben bisher alle Ergebnisse nur für reellwertige Lösungen von Differentialgleichungen formuliert und bewiesen. Es ist jedoch kein Problem, alle diese Ergebnisse auf komplexwertige Lösungen zu übertragen, wobei dann z.B. auch die Koeffizentenfunktionen und die Störfunktion einer linearen Differentialgleichung komplexwertig sein dürfen. Wir machen hier jetzt davon Gebrauch.

Zur Bestimmung eines Fundamentalsystems machen wir den Exponentialansatz

$$y(x) = e^{\lambda x}$$

mit $\lambda \in \mathbb{C}$. Ableiten und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(\lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0)e^{\lambda x} = 0\,.$$

Hieraus folgt

$$P(\lambda) = P_L(\lambda) := \lambda^n + a_{n-1}\lambda^{n-1} + \cdots + a_1\lambda + a_0 = 0\,.$$

Man nennt P auch das *charakteristische Polynom* der Differentialgleichung (H) und die Gleichung $P(\lambda^n) = 0$ die *charakteristische Gleichung* von (H). Nun bestimmt man die (komplexen) Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit den Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_m$ ($r_1 + \cdots + r_m = n$). P besitzt dann die Linearfaktorzerlegung

$$P(\lambda) = \prod_{j=1}^{m} (\lambda - \lambda_j)^{r_j}\,.$$

Satz 13.4.8. *Das charakteristische Polynom P der der Differentialgleichung* (H) *habe die paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit den Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_m$ $(r_1 + \cdots + r_m = n)$. Dann bilden die Funktionen*

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}, & xe^{\lambda_1 x}, & \ldots, & x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_m x}, & xe^{\lambda_m x}, & \ldots, & x^{r_m-1}e^{\lambda_m x} \end{array}$$

ein Fundamentalsystem.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die angegebenen Funktionen Lösungen von $L[y] = 0$ sind. Dazu betrachten wir für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ die Funktion

$$y(x) := x^r e^{\lambda x}.$$

Dann folgt (mit $a_n = 1$)

$$\begin{aligned} L[y] &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}\left(x^r e^{\lambda x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d^r}{d\lambda^r} e^{\lambda x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^r}{d\lambda^r}\left(\frac{d^k}{dx^k} e^{\lambda x}\right) \\ &= \frac{d^r}{d\lambda^r}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k} e^{\lambda x}\right) = \frac{d^r}{d\lambda^r}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda x}\right) = \frac{d^r}{d\lambda^r}\left(P(\lambda)e^{\lambda x}\right). \end{aligned}$$

Nun folgt mit der Leibnizschen Produktregel

$$L[y] = \sum_{\ell=0}^{r} \binom{r}{\ell} \left(\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell} P(\lambda)\right) x^{r-\ell} e^{\lambda x}.$$

Ist nun $\lambda = \lambda_j$ eine Nullstelle von P der Vielfachheit r_j, so gilt

$$P(\lambda_j) = P'(\lambda_j) = \cdots = P^{(r_j-1)}(\lambda_j) = 0$$

und daher folgt für $r = 0, 1, \ldots, r_j - 1$

$$L[y] = 0.$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass die angegebenen Funktionen linear unabhängig sind. Eine Linearkombination dieser Funktionen ist von der Form

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_m(x)e^{\lambda_m x}$$

mit Polynomen P_j vom Grad höchstens $r_j - 1$ für $j = 1, \ldots, m$. Es ist also zu zeigen, dass aus

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_m(x)e^{\lambda_m x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt $P_1(x) = \cdots = P_m(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion nach m. Für $m = 1$ ist dies offensichtlich richtig. Nun gelte die Behauptung für ein $(m-1)$, und es sei

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_{m-1}(x)e^{\lambda_{m-1} x} + P_m(x)e^{\lambda_m x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $e^{-\lambda_m x}$ und erhalten

$$P_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} + \cdots + P_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x} + P_m(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Jetzt differenzieren wir diese Gleichung r_m-mal nach x und erhalten

$$\tilde{P}_1(x)e^{(\lambda_1 - \lambda_m)x} + \cdots + \tilde{P}_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1} - \lambda_m)x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $\tilde{P}_j$ Polynome vom selben Grad wie P_j sind. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt nun $\tilde{P}_1(x) = \cdots = \tilde{P}_{m-1}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $P_1(x) = \cdots = P_{m-1}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher auch $P_m(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Bei den im obigen Satz angegebenen Lösungen können komplexwertige vorkommen, sofern das charakteristische Polynom komplexe Nullstellen hat. Das nächste Ergebnis zeigt, wie man hieraus reellwertige Lösungen erhält.

Satz 13.4.9. *Die Koeffizienten der Differentialgleichung $L[y] = 0$ seien reell und das zugehörige charakteristische Polynom P habe die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen $x_1, \ldots, x_r$ mit den Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_r$ und die paarweise verschiedenen konjugiert komplexen Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$, $\bar{z}_j = a_j - ib_j$ mit den Vielfachheiten μ_j für $j = 1, \ldots, s$. Dann bilden die Funktionen*

$$\begin{array}{llll} e^{x_1 x}, & xe^{x_1 x}, & \ldots, & x^{m_1 - 1}e^{x_1 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{x_r x}, & xe^{x_r x}, & \ldots, & x^{m_r - 1}e^{x_r x}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
e^{a_1 x}\cos b_1 x\,, & xe^{a_1 x}\cos b_1 x\,, & \ldots\,, & x^{\mu_1-1}e^{a_1 x}\cos b_1 x\,,\\
e^{a_1 x}\sin b_1 x\,, & xe^{a_1 x}\sin b_1 x\,, & \ldots\,, & x^{\mu_1-1}e^{a_1 x}\sin b_1 x\,,\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
e^{a_s x}\cos b_s x\,, & xe^{a_s x}\cos b_s x\,, & \ldots\,, & x^{\mu_s-1}e^{a_s x}\cos b_s x\,,\\
e^{a_s x}\sin b_s x\,, & xe^{a_s x}\sin b_s x\,, & \ldots\,, & x^{\mu_s-1}e^{a_s x}\sin b_s x
\end{array}$$

ein Fundamentalsystem.

Beweis. Sind $z = a + ib$ und $\bar{z} = a - ib$ konjugiert komplexe Nullstellen der Vielfachheit μ von P, so sind $y_1(x) := x^\ell e^{(a+ib)x}$ und $y_2(x) := x^\ell e^{(a-ib)x}$ Lösungen von $L[y] = 0$. Wegen der Linearität des Operators L sind dann auch die Linearkombinationen

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,y_1(x) + \tfrac{1}{2}\,y_2(x) &= \tfrac{1}{2}\,x^\ell e^{(a+ib)x} + \tfrac{1}{2}\,x^\ell e^{(a-ib)x} = \mathrm{Re}\,(x^\ell e^{(a+ib)x}) = x^\ell e^{ax}\cos bx\,,\\
\tfrac{1}{2i}\,y_1(x) - \tfrac{1}{2i}\,y_2(x) &= \tfrac{1}{2i}\,x^\ell e^{(a+ib)x} - \tfrac{1}{2i}\,x^\ell e^{(a-ib)x} = \mathrm{Im}\,(x^\ell e^{(a+ib)x}) = x^\ell e^{ax}\sin bx
\end{aligned}$$

Lösungen von $L[y] = 0$. Daher sind alle angegebenen Funktionen Lösungen von $L[y] = 0$.

Der Beweis der linearen Unahbhängigkeit erfolgt ähnlich wie im vorigen Satz, und wir verzichten daher darauf. □

Beispiele . (a) $y''' - 7y' + 6y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$

Nullstellen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$ (alle reell und einfach)

Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{-3x}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c_2 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$

(b) $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = (\lambda + 1)^3(\lambda - 1)$

Nullstellen: $\lambda_1 = -1$ (reell und dreifach), $\lambda_2 = 1$ (reell und einfach)

Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$, $y_3(x) = x^2 e^{-x}$, $y_4(x) = e^x$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 x e^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + c_4 e^x$

(c) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$

$P(\lambda) = \lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4)^2$

Nullstellen: $\lambda_1 = 0$ (reell und einfach), $\lambda_{2,3,4,5} = \pm 2i$ (konjugiert komplex und zweifach)

Fundamentalsystem: $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \cos 2x$, $y_3(x) = x\cos 2x$, $y_4(x) = \sin 2x$, $y_5(x) = x\sin 2x$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 + c_2\cos 2x + c_3 x\cos 2x + c_4\sin 2x + c_5 x\sin 2x$

Wir betrachten nun die inhomogene Differentialgleichung (L) und setzen voraus, dass ein Fundamentalsystem $\{y_1, \dots, y_2\}$ der homogenen Differentialgleichung (H) bekannt ist. Zur Bestimmung einer partikulären Lösung y_0 der inhomogenen Differentialgleichung kann man prinzipiell immer die Methode der Variation der Konstanten (Satz 13.4.7) anwenden. Wir betrachten ein Beispiel hierzu.

Beispiel . Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}\,.$$

Ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = \cos 2x$ und $y_2(x) = \sin 2x$. Für die Wronski-Determinante gilt

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\,.$$

Weiter gilt

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ 1 & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\sin 2x\,, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & 1 \end{vmatrix} = \cos 2x\,.$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -\frac{1}{2}\cos 2x \int_0^x \frac{\sin 2t}{\cos 2t}\,dt + \frac{1}{2}\sin 2x \int_0^x \frac{\cos 2t}{\cos 2t}\,dt \\ &= \tfrac{1}{4}\cos 2x \log|\cos 2x| + \tfrac{1}{2}\,x\sin 2x\,. \end{aligned}$$

Daher lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \tfrac{1}{4}\cos 2x\log|\cos 2x| + \tfrac{1}{2}\,x\sin 2x\,.$$

Bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und speziellen Störfunktionen g kann man die Methode des *Ansatzes vom Typ der rechten Seite* (oder *Methode der unbestimmten Koeffizienten* genannt) benutzen. Wir stellen diese Störfunktionen und die zugehörigen Ansätze im Folgenden vor.

Typ I: $g(x) = P_m(x)e^{\lambda_0 x}$

Dabei ist $m \in \mathbb{N}_0$, P_m ein Polynom vom Grad m und $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz hängt davon ab, ob λ_0 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

(a) λ_0 ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann lautet der Ansatz

$$y_0(x) = (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)e^{\lambda_0 x}\,.$$

(b) λ_0 ist eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann lautet der Ansatz

$$y_0(x) = x^k(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)e^{\lambda_0 x}\,.$$

Wir verzichten auf den Beweis, dass diese Ansätze tatsächlich zum Ziel führen und betrachten Beispiele dazu.

Beispiel . $y'' + y = x^2$
Nullstellen von P: $\lambda_{1,2} = \pm i$
Fundamentalsystem: $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$
Die Störfunktion $g(x) = x^2$ ist ein Polynom vom Grad $m = 2$, $\lambda_0 = 0$ und λ_0 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.
Ansatz: $y_0(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Dann folgt

$$y_0'(x) = 2b_2x + b_1\,, \quad y_0''(x) = 2b_2$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$2b_2 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = x^2\,,$$

also $b_2 = 1$, $b_1 = 0$, $2b_2 + b_0 = 0$, d.h. $b_0 = -2$ und somit $y_0(x) = x^2 - 2$.
Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 2$.

Beispiel . $y'' + 2y' + y = 6xe^{-x}$
Nullstellen von P: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$
Für die Störfunktion $g(x) = xe^{-x}$ ist $m = 1$, $P_1(x) = x$, $\lambda_0 = -1$ und λ_0 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Ansatz: $y_0(x) = x^2(b_1x + b_0)e^{-x} = (b_1x^3 + b_0x^2)e^{-x}$. Dann folgt

$$y_0'(x) = (-b_1x^3 - b_0x^2 + 3b_1x^2 + 2b_0x)e^{-x}\,,$$
$$y_0''(x) = (b_1x^3 - 6b_1x^2 + b_0x^2 + 6b_1x - 4b_0x + 2b_0)e^{-x}$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(6b_1x + 4b_0x + 2b_0)e^{-x} = 6xe^{-x}\,,$$

also $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ und somit $y_0(x) = x^3e^{-x}$.
Allgemeine Lösung: $y(x) = (c_1 + c_2x + x^3)e^{-x}$.

Typ II: $g(x) = P_m(x)e^{\lambda_0 x}\cos\mu_0 x$ oder $g(x) = P_m(x)e^{\lambda_0 x}\sin\mu_0 x$

Dabei ist $m \in \mathbb{N}_0$, P_m ein Polynom vom Grad m, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ und $\mu_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Wir ersetzen in der Differentialgleichung

$$L[y] = g(x)$$

die Störfunktion g durch die komplexwertige Funktion $P_m(x)e^{(\lambda_0+i\mu_0)x}$, d.h. wir betrachten die Differentialgleichung

$$L[y] = P_m(x)e^{(\lambda_0+i\mu_0)x}\,.$$

Der Ansatz hängt wieder davon ab, ob $\lambda_0 + i\mu_0$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Man geht dann wie bei Typ I vor, d.h. man bestimmt eine komplexwertige partikuläre Lösung und nimmt davon den Real- bzw. Imaginärteil.

Beispiel . $y'' + y = 2\cos x$, $y'' + y = 2\sin x$,
Nullstellen von P: $\lambda_{1,2} = \pm i$
Fundamentalsystem: $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$
Diese beiden Differentialgleichungen kann man simultan behandeln. Für die Störfunktion g ist $m = 0$, $P_0(x) = 2$, $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 1$ und $\lambda_0 + i\mu_0$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms.
Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$y'' + y = e^{ix}$$

und machen den Ansatz

$$y_0(x) = b_0 x e^{ix}\,.$$

Dann folgt

$$y_0'(x) = (b_0 + ib_0 x)e^{ix}\,, \quad y_0''(x) = (2ib_0 - b_0 x)e^{ix}$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $2ib_0 x e^{ix} = 2e^{ix}$. Also $b_0 = \frac{1}{i} = -i$ und somit

$$y_0(x) = -ixe^{ix} = -ix(\cos x + i\sin x) = x\sin x - ix\cos x\,.$$

Allgemeine Lösung:

1. Differentialgleichung: $y(x) = c_1\cos x + (c_2 + x)\sin x$.

2. Differentialgleichung: $y(x) = (c_1 - x)\cos x + c_2\sin x$.