Satz 4.4.8. *Das charakteristische Polynom P der der Differentialgleichung* (H) *habe die paarweise verschiedenen Nullstellen $\lambda_1, \ldots, \lambda_m$ mit den Vielfachheiten $r_1, \ldots, r_m$ ($r_1 + \cdots + r_m = n$). Dann bilden die Funktionen*

$$\begin{array}{cccc} e^{\lambda_1 x}\,, & xe^{\lambda_1 x}\,, & \ldots\,, & x^{r_1-1}e^{\lambda_1 x}\,, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{\lambda_m x}\,, & xe^{\lambda_m x}\,, & \ldots\,, & x^{r_m-1}e^{\lambda_m x} \end{array}$$

ein Fundamentalsystem.

Beweis. Wir zeigen zunächst, dass die angegebenen Funktionen Lösungen von $L[y] = 0$ sind. Dazu betrachten wir für $\lambda \in \mathbb{C}$ und $r \in \mathbb{N}_0$ die Funktion

$$y(x) := x^r e^{\lambda x}\,.$$

Dann folgt (mit $a_n = 1$)

$$\begin{aligned} L[y] &= \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}\left(x^r e^{\lambda x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}\left(\frac{d^r}{d\lambda^r}\, e^{\lambda x}\right) = \sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^r}{d\lambda^r}\left(\frac{d^k}{dx^k}\, e^{\lambda x}\right) \\ &= \frac{d^r}{d\lambda^r}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \frac{d^k}{dx^k}\, e^{\lambda x}\right) = \frac{d^r}{d\lambda^r}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k \lambda^k e^{\lambda x}\right) = \frac{d^r}{d\lambda^r}\left(P(\lambda)e^{\lambda x}\right)\,. \end{aligned}$$

Nun folgt mit der Leibnizschen Produktregel

$$L[y] = \sum_{\ell=0}^{r} \binom{r}{\ell}\left(\frac{d^\ell}{d\lambda^\ell}\, P(\lambda)\right) x^{r-\ell} e^{\lambda x}\,.$$

Ist nun $\lambda = \lambda_j$ eine Nullstelle von P der Vielfachheit r_j, so gilt

$$P(\lambda_j) = P'(\lambda_j) = \cdots = P^{(r_j-1)}(\lambda_j) = 0$$

und daher folgt für $r = 0, 1, \ldots, r_j - 1$

$$L[y] = 0\,.$$

Nun müssen wir noch zeigen, dass die angegebenen Funktionen linear unabhängig sind. Eine Linearkombination dieser Funktionen ist von der Form

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_m(x)e^{\lambda_m x}$$

mit Polynomen P_j vom Grad höchstens $r_j - 1$ für $j = 1, \ldots, m$. Es ist also zu zeigen, dass aus

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_m(x)e^{\lambda_m x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$ folgt $P_1(x) = \cdots = P_m(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Dies zeigen wir mit vollständiger Induktion nach m. Für $m = 1$ ist dies offensichtlich richtig. Nun gelte die Behauptung für ein $(m-1)$, und es sei

$$P_1(x)e^{\lambda_1 x} + \cdots + P_{m-1}(x)e^{\lambda_{m-1} x} + P_m(x)e^{\lambda_m x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Wir multiplizieren diese Gleichung mit $e^{-\lambda_m x}$ und erhalten

$$P_1(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} + \cdots + P_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x} + P_m(x) = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$. Jetzt differenzieren wir diese Gleichung r_m-mal nach x und erhalten

$$\tilde{P}_1(x)e^{(\lambda_1-\lambda_m)x} + \cdots + \tilde{P}_{m-1}(x)e^{(\lambda_{m-1}-\lambda_m)x} = 0$$

für alle $x \in \mathbb{R}$, wobei $\tilde{P}_j$ Polynome vom selben Grad wie P_j sind. Aus der Induktionsvoraussetzung folgt nun $\tilde{P}_1(x) = \cdots = \tilde{P}_{m-1}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. Hieraus folgt $P_1(x) = \cdots = P_{m-1}(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$ und daher auch $P_m(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$. □

Bei den im obigen Satz angegebenen Lösungen können komplexwertige vorkommen, sofern das charakteristische Polynom komplexe Nullstellen hat. Das nächste Ergebnis zeigt, wie man hieraus reellwertige Lösungen erhält.

Satz 4.4.9. *Die Koeffizienten der Differentialgleichung $L[y] = 0$ seien reell und das zugehörige charakteristische Polynom P habe die paarweise verschiedenen reellen Nullstellen $x_1, \ldots, x_r$ mit den Vielfachheiten $m_1, \ldots, m_r$ und die paarweise verschiedenen konjugiert komplexen Nullstellen $z_j = a_j + ib_j$, $\bar{z}_j = a_j - ib_j$ mit den Vielfachheiten μ_j für $j = 1, \ldots, s$. Dann bilden die Funktionen*

$$\begin{array}{llll} e^{x_1 x}, & xe^{x_1 x}, & \ldots, & x^{m_1-1}e^{x_1 x}, \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ e^{x_r x}, & xe^{x_r x}, & \ldots, & x^{m_r-1}e^{x_r x}, \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc}
e^{a_1 x}\cos b_1 x\,, & xe^{a_1 x}\cos b_1 x\,, & \ldots\,, & x^{\mu_1-1}e^{a_1 x}\cos b_1 x\,,\\
e^{a_1 x}\sin b_1 x\,, & xe^{a_1 x}\sin b_1 x\,, & \ldots\,, & x^{\mu_1-1}e^{a_1 x}\sin b_1 x\,,\\
\vdots & \vdots & & \vdots\\
e^{a_s x}\cos b_s x\,, & xe^{a_s x}\cos b_s x\,, & \ldots\,, & x^{\mu_s-1}e^{a_s x}\cos b_s x\,,\\
e^{a_s x}\sin b_s x\,, & xe^{a_s x}\sin b_s x\,, & \ldots\,, & x^{\mu_s-1}e^{a_s x}\sin b_s x
\end{array}$$

ein Fundamentalsystem.

Beweis. Sind $z = a + ib$ und $\bar{z} = a - ib$ konjugiert komplexe Nullstellen der Vielfachheit μ von P, so sind $y_1(x) := x^\ell e^{(a+ib)x}$ und $y_2(x) := x^\ell e^{(a-ib)x}$ Lösungen von $L[y] = 0$. Wegen der Linearität des Operators L sind dann auch die Linearkombinationen

$$\begin{aligned}
\tfrac{1}{2}\,y_1(x) + \tfrac{1}{2}\,y_2(x) &= \tfrac{1}{2}\,x^\ell e^{(a+ib)x} + \tfrac{1}{2}\,x^\ell e^{(a-ib)x} = \mathrm{Re}\,(x^\ell e^{(a+ib)x}) = x^\ell e^{ax}\cos bx\,,\\
\tfrac{1}{2i}\,y_1(x) - \tfrac{1}{2i}\,y_2(x) &= \tfrac{1}{2i}\,x^\ell e^{(a+ib)x} - \tfrac{1}{2i}\,x^\ell e^{(a-ib)x} = \mathrm{Im}\,(x^\ell e^{(a+ib)x}) = x^\ell e^{ax}\sin bx
\end{aligned}$$

Lösungen von $L[y] = 0$. Daher sind alle angegebenen Funktionen Lösungen von $L[y] = 0$.

Der Beweis der linearen Unahbhängigkeit erfolgt ähnlich wie im vorigen Satz, und wir verzichten daher darauf. □

Beispiele . (a) $y''' - 7y' + 6y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^3 - 7\lambda + 6 = (\lambda - 1)(\lambda - 2)(\lambda + 3)$

Nullstellen: $\lambda_1 = 1$, $\lambda_2 = 2$, $\lambda_3 = -3$ (alle reell und einfach)

Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^x$, $y_2(x) = e^{2x}$, $y_3(x) = e^{-3x}$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c_2 e^x + c_2 e^{2x} + c_3 e^{-3x}$

(b) $y^{(4)} + 2y''' - 2y' - y = 0$

$P(\lambda) = \lambda^4 + 2\lambda^3 - 2\lambda - 1 = (\lambda + 1)^3(\lambda - 1)$

Nullstellen: $\lambda_1 = -1$ (reell und dreifach), $\lambda_2 = 1$ (reell und einfach)

Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$, $y_3(x) = x^2 e^{-x}$, $y_4(x) = e^x$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 e^{-x} + c_2 xe^{-x} + c_3 x^2 e^{-x} + c_4 e^x$

(c) $y^{(5)} + 8y''' + 16y' = 0$

$P(\lambda) = \lambda^5 + 8\lambda^3 + 16\lambda = \lambda(\lambda^2 + 4)^2$

Nullstellen: $\lambda_1 = 0$ (reell und einfach), $\lambda_{2,3,4,5} = \pm 2i$ (konjugiert komplex und zweifach)

Fundamentalsystem: $y_1(x) = 1$, $y_2(x) = \cos 2x$, $y_3(x) = x\cos 2x$, $y_4(x) = \sin 2x$, $y_5(x) = x\sin 2x$

Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 + c_2\cos 2x + c_3 x\cos 2x + c_4\sin 2x + c_5 x\sin 2x$

Wir betrachten nun die inhomogene Differentialgleichung (L) und setzen voraus, dass ein Fundamentalsystem $\{y_1, \ldots, y_2\}$ der homogenen Differentialgleichung (H) bekannt ist. Zur Bestimmung einer partikulären Lösung y_0 der inhomogenen Differentialgleichung kann man prinzipiell immer die Methode der Variation der Konstanten (Satz 4.4.7) anwenden. Wir betrachten ein Beispiel hierzu.

Beispiel . Wir betrachten die Differentialgleichung

$$y'' + 4y = \frac{1}{\cos 2x}\,.$$

Ein Fundamentalsystem der homogenen Differentialgleichung ist gegeben durch $y_1(x) = \cos 2x$ und $y_2(x) = \sin 2x$. Für die Wronski-Determinante gilt

$$W(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & \sin 2x \\ -2\sin 2x & 2\cos 2x \end{vmatrix} = 2\,.$$

Weiter gilt

$$W_1(x) = \begin{vmatrix} 0 & \sin 2x \\ 1 & 2\cos 2x \end{vmatrix} = -\sin 2x\,, \quad W_2(x) = \begin{vmatrix} \cos 2x & 0 \\ -2\sin 2x & 1 \end{vmatrix} = \cos 2x\,.$$

Als spezielle Lösung der inhomogenen Differentialgleichung erhalten wir

$$\begin{aligned} y_0(x) &= -\frac{1}{2}\cos 2x \int_0^x \frac{\sin 2t}{\cos 2t}\,dt + \frac{1}{2}\sin 2x \int_0^x \frac{\cos 2t}{\cos 2t}\,dt \\ &= \tfrac{1}{4}\cos 2x \log|\cos 2x| + \tfrac{1}{2}\,x\sin 2x\,. \end{aligned}$$

Daher lautet die allgemeine Lösung

$$y(x) = c_1\cos 2x + c_2\sin 2x + \tfrac{1}{4}\cos 2x\log|\cos 2x| + \tfrac{1}{2}\,x\sin 2x\,.$$

Bei linearen Differentialgleichungen mit konstanten Koeffizienten und speziellen Störfunktionen g kann man die Methode des *Ansatzes vom Typ der rechten Seite* (oder *Methode der unbestimmten Koeffizienten* genannt) benutzen. Wir stellen diese Störfunktionen und die zugehörigen Ansätze im Folgenden vor.

Typ I: $g(x) = P_m(x)e^{\lambda_0 x}$

Dabei ist $m \in \mathbb{N}_0$, P_m ein Polynom vom Grad m und $\lambda_0 \in \mathbb{R}$. Der Ansatz hängt davon ab, ob λ_0 eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist.

(a) λ_0 ist keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann lautet der Ansatz

$$y_0(x) = (b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)e^{\lambda_0 x}\,.$$

(b) λ_0 ist eine k-fache Nullstelle des charakteristischen Polynoms. Dann lautet der Ansatz

$$y_0(x) = x^k(b_m x^m + \cdots + b_1 x + b_0)e^{\lambda_0 x}\,.$$

Wir verzichten auf den Beweis, dass diese Ansätze tatsächlich zum Ziel führen und betrachten Beispiele dazu.

Beispiel . $y'' + y = x^2$
Nullstellen von P: $\lambda_{1,2} = \pm i$
Fundamentalsystem: $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$
Die Störfunktion $g(x) = x^2$ ist ein Polynom vom Grad $m = 2$, $\lambda_0 = 0$ und λ_0 keine Nullstelle des charakteristischen Polynoms.
Ansatz: $y_0(x) = b_2x^2 + b_1x + b_0$. Dann folgt

$$y_0'(x) = 2b_2x + b_1\,, \quad y_0''(x) = 2b_2$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$2b_2 + b_2x^2 + b_1x + b_0 = x^2\,,$$

also $b_2 = 1$, $b_1 = 0$, $2b_2 + b_0 = 0$, d.h. $b_0 = -2$ und somit $y_0(x) = x^2 - 2$.
Allgemeine Lösung: $y(x) = c_1 \cos x + c_2 \sin x + x^2 - 2$.

Beispiel . $y'' + 2y' + y = 6xe^{-x}$
Nullstellen von P: $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$
Fundamentalsystem: $y_1(x) = e^{-x}$, $y_2(x) = xe^{-x}$
Für die Störfunktion $g(x) = xe^{-x}$ ist $m = 1$, $P_1(x) = x$, $\lambda_0 = -1$ und λ_0 eine doppelte Nullstelle des charakteristischen Polynoms.

Ansatz: $y_0(x) = x^2(b_1x + b_0)e^{-x} = (b_1x^3 + b_0x^2)e^{-x}$. Dann folgt

$$y_0'(x) = (-b_1x^3 - b_0x^2 + 3b_1x^2 + 2b_0x)e^{-x}\,,$$
$$y_0''(x) = (b_1x^3 - 6b_1x^2 + b_0x^2 + 6b_1x - 4b_0x + 2b_0)e^{-x}$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert

$$(6b_1x + 4b_0x + 2b_0)e^{-x} = 6xe^{-x}\,,$$

also $b_0 = 0$, $b_1 = 1$ und somit $y_0(x) = x^3e^{-x}$.
Allgemeine Lösung: $y(x) = (c_1 + c_2x + x^3)e^{-x}$.

Typ II: $g(x) = P_m(x)e^{\lambda_0 x}\cos\mu_0 x$ oder $g(x) = P_m(x)e^{\lambda_0 x}\sin\mu_0 x$

Dabei ist $m \in \mathbb{N}_0$, P_m ein Polynom vom Grad m, $\lambda_0 \in \mathbb{R}$ und $\mu_0 \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$.

Wir ersetzen in der Differentialgleichung

$$L[y] = g(x)$$

die Störfunktion g durch die komplexwertige Funktion $P_m(x)e^{(\lambda_0+i\mu_0)x}$, d.h. wir betrachten die Differentialgleichung

$$L[y] = P_m(x)e^{(\lambda_0+i\mu_0)x}\,.$$

Der Ansatz hängt wieder davon ab, ob $\lambda_0 + i\mu_0$ eine Nullstelle des charakteristischen Polynoms ist. Man geht dann wie bei Typ I vor, d.h. man bestimmt eine komplexwertige partikuläre Lösung und nimmt davon den Real- bzw. Imaginärteil.

Beispiel . $y'' + y = 2\cos x$, $y'' + y = 2\sin x$,
Nullstellen von P: $\lambda_{1,2} = \pm i$
Fundamentalsystem: $y_1(x) = \cos x$, $y_2(x) = \sin x$
Diese beiden Differentialgleichungen kann man simultan behandeln. Für die Störfunktion g ist $m = 0$, $P_0(x) = 2$, $\lambda_0 = 0$, $\mu_0 = 1$ und $\lambda_0 + i\mu_0$ eine einfache Nullstelle des charakteristischen Polynoms.
Wir betrachten nun die Differentialgleichung

$$y'' + y = e^{ix}$$

und machen den Ansatz

$$y_0(x) = b_0 x e^{ix} .$$

Dann folgt

$$y_0'(x) = (b_0 + ib_0 x)e^{ix} , \quad y_0''(x) = (2ib_0 - b_0 x)e^{ix}$$

und Einsetzen in die Differentialgleichung liefert $2ib_0 xe^{ix} = 2e^{ix}$. Also $b_0 = \frac{1}{i} = -i$ und somit

$$y_0(x) = -ixe^{ix} = -ix(\cos x + i \sin x) = x \sin x - ix \cos x .$$

Allgemeine Lösung:

1. Differentialgleichung: $y(x) = c_1 \cos x + (c_2 + x) \sin x$.

2. Differentialgleichung: $y(x) = (c_1 - x) \cos x + c_2 \sin x$.

4.4.5 Lösung durch Potenzreihenansatz

Wir behandeln nun noch eine Methode, die häufig zur Lösung von linearen Differentialgleichungen n-ter Ordnung mit nicht-konstanten Koeffizienten angewendet werden kann. Dazu betrachten wir

$$\text{(L)} \qquad L[y] = y^{(n)} + \alpha_{n-1}(x)y^{(n-1)} + \cdots + \alpha_1(x)y' + \alpha_0(x)y = g(x)$$

und setzen voraus, dass die Funktionen $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$, g in $U_\rho(x_0)$ (mit $x_0 \in \mathbb{R}$, $\rho > 0$) durch eine Potenzreihe dargestellt werden. Zur Lösung macht man den so genannten *Potenzreihenansatz*

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k (x - x_0)^k .$$

Diesen Ansatz leitet man n-mal ab und setzt in die Differentialgleichung ein (wobei das Cauchy-Produkt von Potenzreihen benötigt wird). Koeffizientenvergleich ergibt dann eine Rekursionsformel für a_k. Dabei sind $a_0, a_1, \ldots, a_{n-1}$ frei wählbar. Man kann zeigen, dass die Potenzreihe im Intervall $U_\rho(x_0)$ konvergiert. In manchen Fällen kann man aus der Rekursionsformel eine explizite Formel herleiten.

Ist ein Anfangswertproblem

$$y(x_0) = \eta_0 , \; y'(x_0) = \eta_1 , \ldots , \; y^{(n-1)}(x_0) = \eta_{n-1}$$

zu lösen, so folgt sofort

$$a_j = \eta_j \,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1 \,.$$

Mit dieser Methode kann man auch ein Fundamentalsystem $\{y_1, \ldots, y_n\}$ der homogenen Differentialgleichung bestimmen. Man erhält y_k, indem man

$$a_j = \delta_{jk} \,, \quad j = 0, 1, \ldots, n-1$$

setzt. Sucht man eine partikuläre Lösung y_0 der inhomogenen Differentialgleichung, so setzt man $a_0 = a_1 = \cdots = a_{n-1} = 0$.

Wir demonstrieren die Methode an einem Beispiel.

Beispiel 4.4.10. Wir betrachten die *Airysche Differentialgleichung* (Historie: George Biddell Airy, englischer Mathematiker und Astronom, 1801 − 1892)

$$y'' - xy = 0 \,.$$

Potenzreihenansatz:

$$y(x) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^k$$

Ableiten liefert

$$y'(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k a_k x^{k-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1) a_{k+1} x^k \,,$$

$$y''(x) = \sum_{k=2}^{\infty} k(k-1) a_k x^{k-2} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k \,.$$

Einsetzen in die Differentialgleichung ergibt

$$\sum_{k=0}^{\infty} (k+2)(k+1) a_{k+2} x^k - \sum_{k=0}^{\infty} a_k x^{k+1} = 0 \,,$$

$$2a_2 + \sum_{k=1}^{\infty} [(k+2)(k+1) a_{k+2} - a_{k-1}] x^k = 0 \,.$$

Jetzt erhalten wir durch Koeffizientenvergleich $a_2 = 0$ und

$$(k+2)(k+1) a_{k+2} - a_{k-1} = 0 \,, \quad k \geq 1$$

oder als Rekursionsformel geschrieben

$$a_{k+2} = \frac{a_{k-1}}{(k+2)(k+1)} \,, \quad k \geq 1 \,.$$

Wegen $a_2 = 0$ folgt aus der Rekursionsformel sofort $a_5 = a_8 = a_{11} = \cdots = 0$, d.h. $a_{3m-1} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$ und alle Lösungen y.

Wir bestimmen jetzt ein Fundamentalsystem.

Bestimmung von $\boldsymbol{y_1}$: Setze $a_0 = 0$ und $a_1 = 1$.

Aus der Rekursionsformel folgt dann wieder $a_3 = a_6 = a_9 = \cdots = 0$, d.h. $a_{3m} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.

Also sind noch $a_4, a_7, a_{10}, \ldots$, d.h. a_{3m-2} für $m \in \mathbb{N}$ zu bestimmen. Setzen wir $b_m = a_{3m-2}$ so ist $b_1 = 1$ und die Rekursionsformel lautet

$$b_{m+1} = \frac{b_m}{3m(3m+1)}, \quad m \in \mathbb{N}.$$

Wir leiten hieraus eine explizite Formel her. Es folgt für $m \geq 2$

$$b_m = \frac{b_m}{b_1} = \prod_{j=1}^{m-1} \frac{b_{j+1}}{b_j} = \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1}{3j(3j+1)} = \frac{1}{3^{m-1}(m-1)!} \prod_{j=1}^{m-1} \frac{1}{3j+1}.$$

Ergebnis:

$$y_1(x) = \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^{m-1}(m-1)!} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{3j+1} \right) x^{3m-2}$$

Für den Konvergenzradius dieser Potenzreihe erhält man mit dem Quotientenkriterium sofort $\rho = \infty$.

Bestimmung von $\boldsymbol{y_2}$: Setze $a_0 = 1$ und $a_1 = 0$.

Aus der Rekursionsformel folgt dann wieder $a_4 = a_7 = a_{10} = \cdots = 0$, d.h. $a_{3m-2} = 0$ für alle $m \in \mathbb{N}$.

Also sind noch $a_3, a_6, a_9, \ldots$, d.h. a_{3m} für $m \in \mathbb{N}_0$ zu bestimmen. Setzen wir $b_m = a_{3m}$ so ist $b_0 = 1$ und die Rekursionsformel lautet

$$b_{m+1} = \frac{b_m}{(3m+2)(3m+3)}, \quad m \in \mathbb{N}_0.$$

Wir leiten hieraus wieder eine explizite Formel her. Es folgt für $m \geq 1$

$$b_m = \frac{b_m}{b_0} = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{b_{j+1}}{b_j} = \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{(3j+2)(3j+3)} = \frac{1}{3^m m!} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{3j+2}.$$

Ergebnis:

$$y_1(x) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{1}{3^m m!} \prod_{j=0}^{m-1} \frac{1}{3j+2} \right) x^{3m}$$

Für den Konvergenzradius dieser Potenzreihe erhält man wieder $\rho = \infty$.