TECHNISCHE UNIVERSITÄT DORTMUND
FAKULTÄT FÜR MATHEMATIK
PROF. DR. RAINER BRÜCK

Dortmund, 10. Januar 2017

Komplexe dynamische Systeme
Beweis zu Lemma 3.4.1

Beweis. Wegen (2) gibt es ein $R > 0$, sodass für jedes $r_0 > R$ die Halbebene $\{ z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > r_0 \}$ invariant unter h ist und $|r(z)| < \frac{1}{2}$ für $|z| > r_0$. Zur Konstruktion der Funktion ϱ schreiben wir $z = x + iy$ mit $y > \varrho(x)$ und $h(z) = u + iv = z + 1 + r(z)$ mit $u < r_0$. Dann gilt

$$v - \varrho(u) = y - \varrho(x) + \operatorname{Im} r(z) - (\varrho(u) - \varrho(x)) > \operatorname{Im} r(z) - \varrho'(\xi)(u - x)$$

mit einem $\xi \in (u, x)$, wobei der 1. Mittelwertsatz angewandt wurde. Es ist

$$u - x = \operatorname{Re} h(z) - x = 1 + \operatorname{Re} r(z) > \tfrac{1}{2}\,.$$

Also erhalten wir

$$v - \varrho(u) > \operatorname{Im} r(z) - \tfrac{1}{2}\,\varrho'(x) > -C|z|^{-\gamma} - \tfrac{1}{2}\,\varrho'(x) > -C(\varrho(x))^{-\gamma} - \tfrac{1}{2}\,\varrho'(x)\,.$$

Daher ist P h-invariant, falls $\varrho'(x) + 2C(\varrho(x))^{-\gamma} \le 0$. Wir definieren also ϱ als Lösung der Differentialgleichung

$$y' + 2Cy^{-\gamma} = 0\,, \quad y(0) = A > 0\,,$$

wobei wir A noch geeignet wählen werden. Die Lösung dieser Differentialgleichung lautet

$$\varrho(x) = (A^{\gamma+1} - 2C(\gamma+1)x)^{1/(\gamma+1)}\,.$$

Wählen wir A hinreichend groß, so hat ϱ die gewünschten Eigenschaften, denn aus der Differentialgleichung folgt $\varrho'(x) < 0$ und $\varrho''(x) = 2\gamma C\varrho(x))^{-\gamma-1}\varrho'(x) < 0$. $\square$