Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 1. Juli 2014

Lineare dynamische Systeme

11. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Für $1 < p < \infty$ sei $C\colon L^p[0,1] \to L^p[0,1]$ der Cesàro-Operator definiert durch

$$(Cf)(t) := \frac{1}{t}\int_0^t f(s)\,ds\,, \quad f \in L^p[0,1]\,, \quad t \in (0,1]$$

wobei $(Cf)(0) := 0$. Zeigen Sie, dass C mischend und chaotisch ist.

Hinweis: Zeigen Sie mit dem Satz von Hahn-Banach, dass die Menge $\langle\, t^\alpha : \alpha \in A \,\rangle$ dicht in $L^p[0,1]$ ist und zwar für jede Menge $A \subset H := \left\{\, z \in \mathbb{C} : \operatorname{Re} z > -\frac{1}{p} \,\right\}$ mit Häufungspunkt in H. Sie dürfen dabei ohne Beweis benutzen, dass die Polynome dicht in $L^p[0,1]$ liegen. Wenden Sie dann das Kriterium von Godefroy und Shapiro an.

2) Es sei $B_w\colon c_0 \to c_0$ der gewichtete Rückwärtsshift definiert durch

$$B_w(x_1, x_2, x_3, \dots) := (w_2x_2, w_3x_3, w_4x_4)\,,$$

mit der Gewichtsfolge

$$w = (w_1, w_2, w_3, \dots) = (1, 2, 2^{-1}, 2, 2, 2^{-1}, 2, 2, 2, 2^{-1}, \dots)\,.$$

Zeigen Sie, dass B_w mischend ist.

3) Es sei $T\colon X \to X$ ein Operator. Betrachten sie folgende Aussagen:

   a) T erfüllt die Voraussetzungen des Hyperzyklizitätskriteriums bezüglich der gesamten Folge (n).

   b) T ist mischend.

   c) T ist erblich-hyperzyklisch bezüglich der gesamten Folge (n).

   Beweisen sie die Implikationen (a) $\implies$ (b) $\iff$ (c).