Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 24. Juni 2014

Lineare dynamische Systeme

10. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es seien X, Y metrische Räume, X kompakt und $f\colon X \to Y$ eine bijektive, stetige Abbildung. Zeigen Sie, dass dann auch $f^{-1}\colon Y \to X$ stetig ist.

2) Beweisen Sie folgendes Universalitätskriterium.

   Es sei X ein separabler, vollständiger metrischer Raum und $T_n\colon X \to X$, $n \in \mathbb{N}$ kommutierende stetige Abbildungen (d.h. $T_m \circ T_n = T_n \circ T_m$ für $m, n \in \mathbb{N}$) mit dichter Bildmenge. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

   (a) (T_n) ist topologisch transitiv.

   (b) Es gibt ein $x \in X$, sodass $\operatorname{orb}(x, (T_n))$ dicht in X liegt.

   Falls eine dieser Bedingungen erfüllt ist, dann ist die Menge aller x mit dichtem Orbit eine dichte G_δ-Menge.

3) Beweisen Sie folgendes Universalitätskriterium (vgl. Satz 1.6.3).

   Es sei X ein vollständiger metrischer Raum, Y ein separabler metrischer Raum und $T_n\colon X \to Y$, $n \in \mathbb{N}$ stetige Abbildungen. Dann sind folgende Aussagen äquivalent:

   (a) (T_n) ist topologisch transitiv.

   (b) Es gibt eine dichte Menge $M \subset X$, sodass für jedes $x \in M$ der Orbit $\operatorname{orb}(x, (T_n))$ dicht in Y liegt.

   Falls eine dieser Bedingungen erfüllt ist, dann ist die Menge M eine dichte G_δ-Menge.

4) Beweisen Sie die folgende Version des Kriteriums von Kitai.

   Es seien $T\colon X \to X$ ein Operator und X_0, $Y_0 \subset X$ dicht in X, sodass gilt

   (i) $T^n x \to 0$ $(n \to \infty)$ für alle $x \in X_0$,

   (ii) zu jedem $y \in Y_0$ gibt es eine Folge (u_n) in X mit $u_n \to 0$ $(n \to \infty)$ und $T^n u_n \to y$ $(n \to \infty)$.

   Dann ist T mischend.