Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 17. Juni 2014

Lineare dynamische Systeme

9. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es seien $T\colon \mathbb{K}^N \to \mathbb{K}^N$, $N \in \mathbb{N}$ ein Operator und $y \in \mathbb{K}^N$ ein hyperzyklischer Vektor von T.

   a) Zeigen Sie, dass $\{y, Ty, T^2y, \dots, T^{N-1}y\}$ eine Basis von $\mathbb{K}^N$ ist.

   b) Wählen Sie Folgen (n_k) und (m_k) natürlicher Zahlen mit $T^{n_k}y \to 0$ $(k \to \infty)$ und $T^{m_k}y \to y$ $(k \to \infty)$. Zeigen Sie, dass dann $T^{n_k}x \to 0$ $(k \to \infty)$ und $T^{m_k}x \to x$ $(k \to \infty)$ für alle $x \in \mathbb{K}^N$. Folgern Sie hieraus $(\det T)^{n_k} \to 0$ $(k \to \infty)$ und $(\det T)^{m_k} \to 1$ $(k \to \infty)$.

   c) Geben Sie einen neuen Beweis von Satz 2.7.2.

2) Es seien $S, T\colon X \to X$ kommutierende Operatoren und T habe eine dichte Bildmenge. Zeigen Sie, dass $HC(S)$ invariant unter T ist.

3) Es sei $T\colon X \to X$ ein hyperzyklischer Operator. Zeigen Sie, dass der duale Operator $T'\colon X' \to X'$ von T keinen endlichdimensionalen invarianten Unterraum besitzt.

   Hinweis: Nehmen Sie an, dass $M = \langle x'_1, \dots, x'_N \rangle$ ein invarianter Unterraum von X' unter T' ist. Konstruieren Sie $K = \langle x_1, \dots, x_N \rangle \subset X$ so, dass $\langle x_j, x'_k \rangle = \delta_{kj}$ für k, $j = 1, \dots, N$ und zeigen Sie, dass durch $\phi(x) = \sum\limits_{k=1}^{N} \langle x, x'_k \rangle x_k$ eine Quasikonjugation zwischen T und $\phi \circ T_{|K}\colon K \to K$ definiert wird.

4) Zeigen, dass es auf $X = \mathbb{R}$ und $X = \mathbb{R}^2$ superzyklische Operatoren gibt.