Technische Universität Dortmund
Fakultät für Mathematik
Prof. Dr. Rainer Brück
Dipl.-Math. Benjamin Mehanna

Dortmund, 3. Juni 2014

Lineare dynamische Systeme

8. Übungsblatt, SoSe 2014

1) Es seien Π die Menge aller Polynome $p \neq 0$, $T\colon X \to X$ ein hyperzyklischer Operator und die Menge

$$\bigcup_{p\in\Pi} \ker p(T)$$

sei dicht in X. Zeigen Sie, dass dann T schwach mischend ist.

Hinweis: Für eine nicht leere, offene Menge $U \subset X$ und eine Nullumgebung $W \subset X$ wählen Sie $u \in U$ und $p \in \Pi$ mit $p(T)u = 0$. Da $p(T)$ nach Satz 2.6.6 dichtes Bild hat, gibt es ein $r > 0$ mit $p(T)(rW) \cap U \neq \emptyset$. Definieren Sie dann $S := rp(T)$ und wenden Sie Satz 2.5.2 an.

2) Es sei X ein Fréchetraum. Zeigen Sie: Eine Menge $M \subset X$ ist beschränkt genau dann, wenn es zu jeder Nullumgebung $W \subset X$ ein $s > 0$ gibt mit $M \subset tW$ für alle $t \geq s$.

3) Es seien X, Y metrische Räume, $T\colon X \to Y$ eine stetige Abbildung, M eine dichte Teilmenge von X und $T(X)$ dicht in Y. Zeigen Sie, dass $T(M)$ dicht in Y ist.

4) Es K ein kompakter metrischer Raum. Zeigen Sie, dass K separabel ist.

   Geben Sie ein einfaches Beispiel eines metrischen Raumes an, der nicht separabel ist.